Chuyên đề 11:

ĐẠI SỐ TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

✓ *Vấn đề 1:* SỬ DỤNG CÔNG THỨC P_n, A_n^k, C_n^k

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. HOÁN VỊ

Số hoán vị của n phần tử: $P_n = n!$

2. CHỈNH HỢP:

Số chỉnh hợp: $A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1)$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

- *Điều kiện:* n ≥ m và n, m nguyên dương

3. TỔ HỢP:

Số tổ hợp: $C_n^m = \dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)}{1.2.3...m}$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

- *Điều kiện:* $\begin{cases} n \geq m \\ \text{n, m nguyên dương} \end{cases}$

Ta có công thức:

1/ $C_n^m = C_n^{n-m}$ 　　2/ $C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m = C_n^m$

3/ $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$

Số tập hợp con của tập hợp n phân tử là 2^n.

B.ĐỀ THI

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2008

Chứng minh rằng $\dfrac{n+1}{n+2}\left(\dfrac{1}{C_{n+1}^k} + \dfrac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right) = \dfrac{1}{C_n^k}$

(n, k là các số nguyên dương, k ≤ n, C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

Giải

Ta có: $\dfrac{n+1}{n+2}\left(\dfrac{1}{C_{n+1}^k} + \dfrac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right) = \dfrac{n+1}{n+2}.\dfrac{k!(n+1-k)! + (k+1)!(n-k)!}{(n+1)!}$

$$= \frac{1}{n+2}.\frac{k!(n-k)!}{n!}\left[(n+1-k)+(k+1)\right] \quad = \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{1}{C_n^k}$$

Bài 2: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2006

> Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 4$). Biết rằng số tập con gồm 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập con gồm 2 phần tử của A.
> Tìm $k \in \{1, 2..., n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất.

Giải

Số tập con k phần tử của tập hợp A bằng C_n^k.

Từ giả thiết suy ra: $C_n^4 = 20C_n^2 \Leftrightarrow n^2 - 5n - 234 = 0 \Leftrightarrow n = 18$ (vì $n \geq 4$).

Do $\dfrac{C_{18}^{k+1}}{C_{18}^k} = \dfrac{18-k}{k+1} > 1 \Leftrightarrow k < 9$ nên $C_{18}^1 < C_{18}^2 < ... < C_{18}^9 \Rightarrow C_{18}^9 > C_{18}^{10} > ... > C_{18}^{18}$

Vậy số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất khi và chỉ khi k = 9.

Bài 3: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2005

> Tính giá trị biểu thức $M = \dfrac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!}$, biết rằng :
> $$C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$$
> (n là số nguyên dương, A_n^k là số chỉnh hợp chập k của n phần tử và C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

Giải

Điều kiện: $n \geq 3$.

Ta có $C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} + 2\frac{(n+2)!}{2!n!} + 2\frac{(n+3)!}{2!(n+1)!} + \frac{(n+4)!}{2!(n+2)!} = 149$$

$\Leftrightarrow n^2 + 4n - 45 = 0 \Leftrightarrow n = 5$ hay $n = -9$ (loại).

suy ra $M = \dfrac{A_6^4 + 3A_5^3}{6!} = \dfrac{\frac{6!}{2!} + 3.\frac{5!}{2!}}{6!} = \dfrac{3}{4}$.

Bài 4: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2005

> Tìm số nguyên n lớn hơn 1 thỏa mãn đẳng thức: $2P_n + 6A_n^2 - P_nA_n^2 = 12$.
> (P_n là số hoán vị của n phần tử và A_n^k là số chỉnh hợp chập k của n phần tử).

Giải

Ta có: $2P_n + 6A_n^2 - P_nA_n^2 = 12$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$

$$\Leftrightarrow 2.n! + 6.\frac{n!}{(n-2)!} - n!\frac{n!}{(n-2)!} = 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!}(6 - n!) - 2(6 - n!) = 0 \Leftrightarrow (6 - n!)\left(\frac{n!}{(n-2)!} - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6 - n! = 0 \\ \dfrac{n!}{(n-2)!} - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n! = 6 \\ n(n-1) - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 3 \\ n = 2 \end{array}\right.$$

✓ *Vấn đề 2:* PHÉP ĐẾM VÀ XÁC SUẤT

A.PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. NGUYÊN TẮC ĐẾM

2 biến cố A và B
A có m cách xảy ra
B có n cách xảy ra
2 biến cố A và B cùng xảy ra có $m \times n$ cách
Biến cố A hoặc B xảy ra có $m + n$ cách

- *Chú ý:* Nguyên tắc trên có thể áp dụng cho nhiều biến cố.

2. CHÚ Ý

- Nếu thay đổi vị trí mà biến cố thay đổi ta có một hoán vị hoặc một chỉnh hợp.
- Nếu thay đổi vị trí mà biến cố không đổi ta có một tổ hợp.

XÁC SUẤT

1. KHÔNG GIAN MẪU

Không gian mẫu là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra.
Biến cố A là một tập con của không gian mẫu.

2. XÁC SUẤT

Nếu các phần tử của không gian mẫu có cùng khả năng xảy ra, h là số phân tử của biến cố A, n là số phân tử của không gian mẫu. Xác suất để biến cố A xảy ra:

$$p(A) = \frac{h}{n}$$

3. CÁC CÔNG THỨC

– Không gian mẫu E là biến cố chắc chắn xảy ra: $p(E) = 1$
– Biến cố $\varnothing$ là biến cố không thể xảy ra: $p(\varnothing) = 0$
– Biến cố kéo theo $A \Rightarrow B$ là biến cố A xảy ra thì biến cố B xảy ra: $A \subset B$.
$P(A) \le p(B)$
– $A \cup B$ là biến cố (A xảy ra hay B xảy ra). $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
– $A \cap B$ là biến cố A và B cùng xảy ra
– Biến cố A và B đối lập nếu không cùng xảy ra. Khi đó, ta có

$$A \cap B = \varnothing; \quad p(A \cap B) = 0; \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

– Biến cố $\overline{A}$ là đối lập của A: $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
– Xác xuất có điều kiện:
Biến cố A xảy ra với điều kiện biến cố B đã xảy ra: $p(A|B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$

$$\text{hay } p(A \cap B) = p(B).p(A|B)$$

– Biến cố A và B độc lập nếu biến cố B có xảy ra hay không thì xác suất của A vẫn không đổi: $p(A|B) = p(A)$

$$p(A \cap B) = p(A)p(B)$$

B. ĐỀ THI

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2006

Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C.

Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

Giải

Số cách chọn 4 học sinh từ 12 học sinh đã cho là $C_{12}^4 = 495$.

Số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một em được tính như sau:

– Lớp A có 2 học sinh, các lớp B, C mỗi lớp có 1 học sinh. Số cách chọn là:

$$C_5^2.C_4^1.C_3^1 = 120$$

– Lớp B có 2 học sinh, các lớp C, A mỗi lớp có 1 học sinh. Số cách chọn là:

$$C_5^1.C_4^2.C_3^1 = 90$$

– Lớp C có 2 học sinh, các lớp A, B mỗi lớp có 1 học sinh. Số cách chọn là:

$$C_5^1.C_4^1.C_3^2 = 60$$

Số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một học sinh là:

$$120 + 90 + 60 = 270.$$

Vậy số cách chọn phải tìm là $495 - 270 = 225$.

Bài 2: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2005

Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người, gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ?

Giải

Có $C_3^1C_{12}^4$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất.

Với mỗi cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất thì có $C_2^1C_8^4$ cách phân công thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ hai.

Với mỗi cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất và tỉnh thứ hai thì có $C_1^1C_4^4$ cách phân công thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ ba.

Số cách phân công thanh niên tình nguyện về 3 tỉnh thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $C_3^1.C_{12}^4.C_2^1.C_8^4.C_1^1.C_4^4 = 207900$ cách

Bài 3:

Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình và 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ ba loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2?

Giải

Có 3 trường hợp xảy ra.

- Trường hợp 1: 2 dễ + 1trung bình + 2 khó: $C_{15}^2C_{10}^1C_5^2 = 10.500$
- Trường hợp 2: 2 dễ + 2 trung bình + 1 khó: $C_{15}^2C_{10}^2C_5^1 = 23.625$
- Trường hợp 3: 3 dễ + 1 trung bình + 1 khó: $C_{15}^3C_{10}^1C_5^1 = 22750$

  Theo qui tắc cộng ta có: $C_{15}^2C_{10}^1C_5^2 + C_{15}^2C_{10}^2C_5^1 + C_{15}^3C_{10}^1C_5^1 = 56875$ đề

Bài 4:

Cho đa giác đều $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ ($n \geq 2$, n nguyên) nội tiếp đường tròn (O), biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong 2n điểm $A_1, A_2, \ldots A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$. Tìm n.

Giải

- Số tam giác thỏa mãn đề bài là C_{2n}^3.
- Số đường chéo qua tâm đường tròn là n, cứ 2 đường chéo qua tâm thì có một hình chữ nhật suy ra ta có C_n^2 hình chữ nhật.

  Theo giả thiết ta có $C_{2n}^2 = 20C_n^2 \Leftrightarrow n^2 - 9n + 8 = 0$

  $\Leftrightarrow$ n = 8 V n = 1 (loại). Kết luận n = 8.

Bài 5:

Đội tuyển học sinh giỏi của một trường gồm 18 em, trong đó có 7 học sinh khối 12, 6 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách cử 8 học sinh trong đội đi dự trại hè sao cho mỗi khối có ít nhất một em được chọn.

Giải

- Số cách chọn 8 học sinh từ 18 học sinh của đội tuyển là:

$$C_{18}^8 = \frac{18!}{8!10!} = 43758 \text{ cách}$$

- Số cách chọn 8 học sinh chỉ gồm có hai khối là:

  Số cách chọn 8 học sinh khối 12 và 11 là C_{13}^8

  Số cách chọn 8 học sinh khối 11 và 10 là C_{11}^8

  Số cách chọn 8 học sinh từ khối 10 và 12 là C_{12}^8

- Số cách chọn theo ycbt: $43758 - \left(C_{13}^8 + C_{11}^8 + C_{12}^8\right) = 41811$ cách

✓ *Vấn đề 3:* NHỊ THỨC NIUTƠN

A.PHƯƠNG PHÁP GIẢI

NHỊ THỨC NIUTƠN:

$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^n b^n$

Chú ý: Số mũ của a tăng dần, số mũ b giảm dần có tổng bằng n.

Các hệ số đối xứng: $C_n^m = C_n^{n-m}$

Tam giác Pascal:

1				n = 0
1	1			n = 1
1	2	1		n = 2
1	3	3	1	n = 3

- *Chú ý*: Dựa vào bảng Pascal ta có thể viết ngay được khai triển Niutơn.

B. ĐỀ THI

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2008

Cho khai triển $(1 + 2x)^n = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, trong đó $n \in N^*$ và các hệ số a_0, a_1, ..., a_n thỏa mãn hệ thức $a_0 + \frac{a_1}{2} + ... + \frac{a_n}{2^n} = 4096$. Tìm số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, ..., a_n$.

Giải

Từ khai triển: $(1 + 2x)^n = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$

- Chọn $x = \frac{1}{2}$ ta được: $2^n = a_0 + \frac{a_1}{2} + ... + \frac{a_n}{2^n} = 4096 = 2^{12} \Rightarrow n = 12$
- Vậy biểu thức khai triển là: $(1 + 2x)^{12}$
- Số hạng tổng quát là $C_{12}^k 2^k.x^k$ $(k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le 12)$

$\Rightarrow$ hệ số tổng quát là $a_k = 2^k.C_{12}^k$; $a_{k+1} = 2^{k+1}.C_{12}^{k+1}$

$a_k < a_{k+1} \Leftrightarrow 2^k.C_{12}^k < 2^{k+1}.C_{12}^{k+1}$

$$\Leftrightarrow 2^k.\frac{12!}{k!(12-k)!} < 2^{k+1}.\frac{12!}{(k+1)!(12-k-1)!}$$

$$\Leftrightarrow k + 1 < 24 - 2k \Leftrightarrow k < \frac{23}{3}$$

Mà $k \in \mathbb{N}$. Do đó: $a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_8$

Tương tự: $a_k > a_{k+1} \Leftrightarrow k > 7$

Do đó: $a_8 > a_9 > ... > a_{12}$

Số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, ..., a_{12}$ là: $a_8 = 2^8.C_{12}^8 = 126720$

Bài 2: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2008

Tìm số nguyên dương n thỏa mãn hệ thức $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} = 2048$

(C_n^k là số tổ hợp chập k của n phân tử).

Giải

$$C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} = 2048 \qquad (*)$$

Ta có: $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + C_{2n}^3 x^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n}$

Với x = 1 thay vào (*) ta được:

$$2^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} \qquad (1)$$

Với x = −1 thay vào (*) ta được:

$$0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + ... - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} \qquad (2)$$

Lấy (1) trừ (2) ta được: $2^{2n} = 2\left(C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1}\right) = 4096 = 2^{12} \Leftrightarrow n = 6$

Bài 3: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2007

Chứng minh rằng: $\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + ... + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n}-1}{2n+1}$

(n là số nguyên dương, C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

Giải

Ta có:

$$(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + ... + C_{2n}^{2n} x^{2n}, (1-x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 x + ... + C_{2n}^{2n} x^{2n}$$

$$\Rightarrow (1+x)^{2n} - (1-x)^{2n} = 2(C_{2n}^1 x + C_{2n}^3 x^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1})$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{(1+x)^{2n} - (1-x)^{2n}}{2} dx = \int_0^1 (C_{2n}^1 x + C_{2n}^3 x^3 + C_{2n}^5 x^5 + ... + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1}) dx$$

- $$\int_0^1 \frac{(1+x)^{2n} - (1-x)^{2n}}{2} dx = \left.\frac{(1+x)^{2n+1} + (1-x)^{2n+1}}{2(2n+1)}\right|_0^1 = \frac{2^{2n}-1}{2n+1} \qquad (1)$$
- $$\int_0^1 \left(C_{2n}^1 x + C_{2n}^3 x^3 + C_{2n}^5 x^5 + ... + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1}\right) dx$$

$$= \left.\left(C_{2n}^1 . \frac{x^2}{2} + C_{2n}^3 . \frac{x^4}{4} + C_{2n}^5 . \frac{x^6}{6} + ... + C_{2n}^{2n-1} . \frac{x^{2n}}{2n}\right)\right|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 ..... + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Bài 4: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2007

Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển nhị thức Niutơn của $(2 + x)^n$, biết:

$$3^n C_n^0 - 3^{n-1}C_n^1 + 3^{n-2}C_n^2 - 3^{n-3}C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^n = 2048$$

(n là số nguyên dương, C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

Giải

Ta có: $3^n C_n^0 - 3^{n-1}C_n^1 + 3^{n-2}C_n^2 - .... + (-1)^n C_n^n = (3-1)^n = 2^n$

Từ giả thiết suy ra n = 11

Hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển Niutơn của $(2 + x)^{11}$ là: $C_{11}^{10}.2^1 = 22$

Bài 5: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2007

Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của: $x(1 - 2x)^5 + x^2(1 + 3x)^{10}$

Giải

Hệ số của x^5 trong khai triển của $x(1 - 2x)^5$ là $(-2)^4.C_5^4$

Hệ số của x^5 trong khai triển của $x^2(1 + 3x)^{10}$ là $3^3 C_{10}^3$

Hệ số của x^5 trong khai triển của $x(1 - 2x)^5 + x^2(1 + 3x)^{10}$ là:

$$(-2)^4 C_5^4 + 3^3 C_{10}^3 = 3320$$

Bài 6: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2006

Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức Niutơn của $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n$ biết rằng $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$

(n nguyên dương, C_n^k là số tổ hợp chập k của n phân tử).

Giải

- Từ giả thiết suy ra: $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + ... + C_{2n+1}^n = 2^{20}$ (1)

  Vì $C_{2n+1}^k = C_{2n+1}^{2n+1-k}$ $\forall k, 0 \le k \le 2n+1$ nên:

  $$C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + ... + C_{2n+1}^n = \frac{1}{2}\left(C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + ... + C_{2n+1}^{2n+1}\right) \quad (2).$$

  Từ khai triển nhị thức Niutơn của $(1+1)^{2n+1}$ suy ra:

  $$C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + ... + C_{2n+1}^{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1} \quad (3)$$

  Từ (1), (2) và (3) suy ra : $2^{2n} = 2^{20}$ hay n = 10.

- Ta có: $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(x^{-4}\right)^{10-k}\left(x^7\right)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{11k-40}$

  Hệ số của x^{26} là C_{10}^k với k thỏa mãn: 11k – 40 = 26 ⇔ k = 6.

  Vậy hệ số của số hạng chứa x^{26} là : $C_{10}^6 = 210$.

Bài 7: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2005

Tìm số nguyên dương n sao cho:

$$C_{2n+1}^{1}-2.2C_{2n+1}^{2}+3.2^{2}C_{2n+1}^{3}-4.2^{3}C_{2n+1}^{4}+....+(2n+1).2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1}=2005$$

(C_{n}^{k} là số tổ hợp chập k của n phần tử)

Giải

Ta có: $(1+x)^{2n+1}=C_{2n+1}^{0}+C_{2n+1}^{1}x+C_{2n+1}^{2}x^{2}+C_{2n+1}^{3}x^{3}+...+C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1}\quad \forall x\in\mathbb{R}$

Đạo hàm hai vế ta có:

$$(2n+1)(1+x)^{2n}=C_{2n+1}^{1}+2C_{2n+1}^{2}x+3C_{2n+1}^{3}x^{2}+...+(2n+1)C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n}\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Thay x = –2 ta có:

$$C_{2n+1}^{1}-2.2C_{2n+1}^{2}+3.2^{2}C_{2n+1}^{3}-4.2C_{2n+1}^{4}+...+(2n+1).2^{n}C_{2n+1}^{2n+1}=2n+1$$

Theo giả thiết ta có 2n + 1 = 2005 ⇒ n = 1002.

Bài 8:

Tìm hệ số của x^{8} trong khai triển thành đa thức của $\left[1+x^{2}(1-x)\right]^{8}$.

Giải

$$\left[1+x^{2}(1-x)\right]^{8}=C_{8}^{0}+C_{8}^{1}x^{2}(1-x)+C_{8}^{2}x^{4}(1-x)^{2}+C_{8}^{3}x^{6}(1-x)^{3}+...$$
$$+...+C_{8}^{8}x^{16}(1-x)^{8}$$

Số hạng chứa x^{8} trong khai triển chỉ có trong $C_{8}^{3}x^{6}(1-x)^{3}$ và $C_{8}^{4}x^{8}(1-x)^{4}$.

Suy ra hệ số của x^{8} là $3C_{8}^{3}+C_{8}^{4}=238$.

Bài 9:

Tìm các số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Niutơn của

$$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{7}\quad \text{với}\quad x>0.$$

Giải

$$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{7}=\sum_{k=0}^{7}C_{7}^{k}\left(\sqrt[3]{x}\right)^{7-k}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{7}C_{7}^{k}x^{\frac{7-k}{3}-\frac{k}{4}}$$

Số hạng không chứa x ứng với $\frac{7-k}{3}-\frac{k}{4}=0\Leftrightarrow 28-4k-3k=0\ \Leftrightarrow\ k=4$

Số hạng không chứa x là $C_{7}^{k}=\frac{7!}{3!4!}=35$.

Bài 10:

Tìm hệ số của số hạng chứa x^{8} trong khai triển nhị thức Niutơn của

$\left(\frac{1}{x^{3}}+\sqrt{x^{5}}\right)^{n}$ biết rằng $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7(n+3)$

(n là số nguyên dương, $x>0$, C_{n}^{k} là số tổ hợp chập k của n phân tử).

Giải

$$C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 7(n+3) \Leftrightarrow \frac{(n+4)!}{(n+1)!3!} - \frac{(n+3)!}{n!3!} = 7(n+3)$$

$\Leftrightarrow$ (n + 3) (3n – 36) = 0 $\Leftrightarrow$ n = 12

Vậy $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \left(x^{-3}\right)^k \left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{12-k}$

Cho $\left(x^{-3}\right)^k \left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{12-k} = x^8 \quad \forall x \neq 0 \Leftrightarrow \quad -3k + \frac{5(12-k)}{2} = 8 \Leftrightarrow k = 4$

Vậy hệ số của x^8 trong khai triển $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^{12}$ là $C_{12}^4 = 495$.

Bài 11:

Cho n là số nguyên dương. Tính tổng:

$$C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$$

(C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

Giải

Xét $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^4$

$$\Rightarrow \int_1^2 (1+x)^n dx = \int_1^2 \left[C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n\right] dx$$

$$\Rightarrow \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_1^2 = \left[C_n^0 x + C_n^1 \frac{x^2}{2} + C_n^2 \frac{x^3}{3} + \ldots + C_n^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_1^2$$

$$\Rightarrow \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1} = C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n.$$

Bài 12:

Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của: $(x^2 + 1)^n (x + 2)^n$. Tìm n để $a_{3n-3} = 26n$.

Giải

$$\left(x^2+1\right)^n \left(x^2+2\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{2n-2k} \sum_{h=0}^{n} C_n^h x^{n-h} 2^h \quad = \sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{n} C_n^k C_n^h x^{3n-(2k+h)}$$

Ycbt $\Leftrightarrow$ 2k + h = 3 $\Rightarrow$ k = h = 1 hay (k = 0 và h = 3)

$\Rightarrow a_{3n-3} = 2C_n^1 C_n^1 + 2^3 C_n^0 C_n^3 = 26n \Rightarrow n = 5$.

Bài 13:

Cho khai triển nhị thức:

$$\left(2^{\frac{x-1}{2}}+2^{-\frac{x}{3}}\right)^n = C_n^0\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^n + C_n^1\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1}\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)+\ldots+$$

$$+C_n^{n-1}\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^{n-1}+C_n^n\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^n$$

(n là số nguyên dương). Biết rằng trong khai triển đó $C_n^3 = 5C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng 20n. Tìm n và x.

Giải

Ta có $C_n^3 = 5C_n^1 \Leftrightarrow \begin{cases} n \in Z^+, n \geq 3 \\ (n-2)(n-1) = 30 \end{cases} \Leftrightarrow n = 7 \vee n = -4$ (loại)

Số hạng thứ tư bằng 20n nên ta có $C_7^3\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^4\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^3 = 140$

$\Leftrightarrow 2^{x-2} = 4 = 2^2 \Leftrightarrow x - 2 = 2 \Leftrightarrow x = 4.$

Bài 14:

Tìm số nguyên dương n sao cho $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \ldots + 2^n C_n^n = 243$.

Giải

$C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \ldots + 2^n C_n^n = 243 \qquad (*)$

Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + \ldots + x^nC_n^n \quad (**)$

Thế x = 2 vào (* *) ta có:

$(1+2)^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \ldots + 2^n C_n^n = 243 \Leftrightarrow 3^n = 243 \Leftrightarrow n = 5.$

Bài 15:

Giả sử n là số nguyên dương và $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots + a_nx^n$

Biết rằng tồn tại số k nguyên ($1 \leq k \leq n-1$) sao cho $\frac{a_k - 1}{2} = \frac{a_k}{9} = \frac{a_{k+1}}{24}$.

Hãy tính n.

Giải

Ta có: $(1 + x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots + a_nx^n$

Vì $\frac{a_{k-1}}{2} = \frac{a_k}{9} = \frac{a_{k+1}}{24} \Leftrightarrow \frac{C_n^{k-1}}{2} = \frac{C_n^k}{9} = \frac{C_n^{k+1}}{24}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{C_n^k}{9} = \dfrac{C_n^{k-1}}{2} \\ \dfrac{C_n^k}{9} = \dfrac{C_n^{k+1}}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(n-k+1) = 9k \\ 3(n-k) = 8(k+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{2n+2}{11} \\ k = \dfrac{3n-8}{11} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 3n - 8 = 2n + 2 \Leftrightarrow n = 10$