Chuyên đề 18: # GIẢI TÍCH TỔ HỢP

I.KHÁI NIỆM VỀ GIAI THỪA:

1.Định nghĩa: Với $n \in N$ và $n > 1$

> Tích của n số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến n được gọi là n - giai thừa. Ký hiệu : n!

Ta có :

$$n! = 1.2...n$$

* Quy ước : $0! = 1$ và $1! = 1$

2. Một số công thức:

* $n! = (n - 1)!.n$ * $\frac{n!}{k!} = (k+1)(k+2)...n \quad (n \geq k)$ * $\frac{n!}{(n-k)!} = (n-k+1)(n-k+2)...n$

II. CÁC QUY TẮC CƠ BẢN VỀ PHÉP ĐẾM:

1. QUY TẮC CỘNG:

Ví dụ: Có 8 quyển sách khác nhau và 6 quyển vở khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một trong các quyển đó.

Quy tắc cộng cho trường hợp hai đối tượng : (Áp dụng khi ta phân chia trường hợp để đếm)

Nếu có m cách chọn đối tượng x
n cách chọn đối tượng y
và nếu cách chọn x không trùng với bất kỳ cách chọn y nào
thì có (m+n) cách chọn.

Tổng quát:

> Nếu có m_1 cách chọn đối tượng x_1
> m_2 cách chọn đối tượng x_2
> .....
> m_n cách chọn đối tượng x_n
> và nếu cách chọn đối tượng x_i không trùng với cách chọn đối tượng x_j nào ($i \neq j$; $i,j=1,2,...,n$)
> thì có $(m_1+m_2+...m_n)$ cách chọn một trong các đối tượng đã cho.

2. QUY TẮC NHÂN: (Áp dụng khi ta phân tích việc thực hiện một phép chọn ra thành nhiều bước liên tiếp)

Ví dụ: An muốn rủ Bình đến chơi nhà Cường. Từ nhà An đến nhà Bình có 3 con đường. Từ nhà Bình đến nhà Cường có 4 con đường đi. Hỏi An có bao nhiêu cách đi đến nhà Cường

Quy tắc nhân:

Nếu **một phép chọn được thực hiện qua n bước liên tiếp**:
bước 1 có m_1 cách chọn
bước 2 có m_2 cách chọn
---
bước n có m_n cách chọn
thì có $(m_1.m_2...m_n)$ cách chọn.

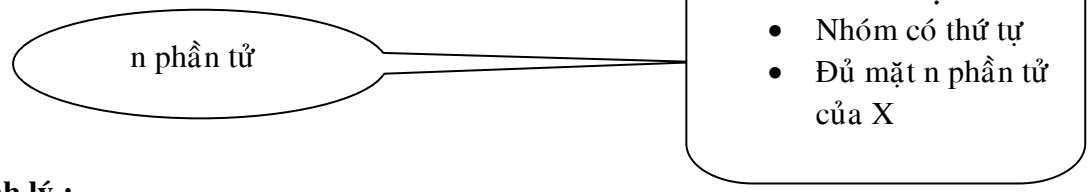
Ví dụ: Người ta có thể ghi nhãn cho những chiếc ghế trong một giảng đường bằng một chữ cái và một số nguyên dương không vượt quá 100. Bằng cách như vậy, nhiều nhất có bao nhiêu chiếc ghế có thể được ghi nhãn khác nhau.

III. HOÁN VỊ:

Ví dụ: Từ các chữ số 1;2;3 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau.

1.Định nghĩa :

Cho tập hợp X gồm n phần tử (n >1).
Mỗi cách sắp thứ tự n phần tử của tập hợp X được gọi là một hoán vị của n phần tử đó



2.Định lý :

Ký hiện số hoán vị của n phần tử là P_n , ta có công thức:

$$P_n = n!$$

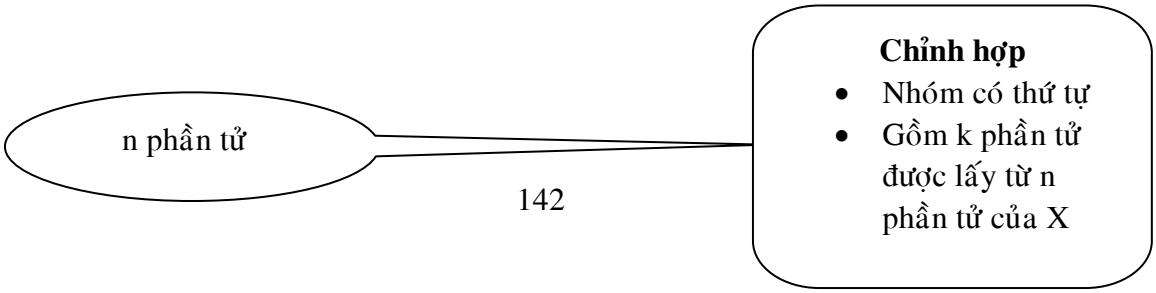
Ví dụ: Một tổ có 10 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách tổ này đứng thành một hàng dọc

IV.CHỈNH HỢP:

Ví dụ: Từ các chữ số 1;2;3 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 2 chữ số khác nhau.

1.Định nghĩa:

Cho tập hợp X gồm n phần tử . **Mỗi bộ gồm k** $(1 \le k \le n)$ **phần tử sắp thứ tự của tập hợp X** được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử của X.



2.<u>Định lý</u>:

Ký hiệu số chỉnh hợp chập k của n phần tử là A_n^k , ta có công thức:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

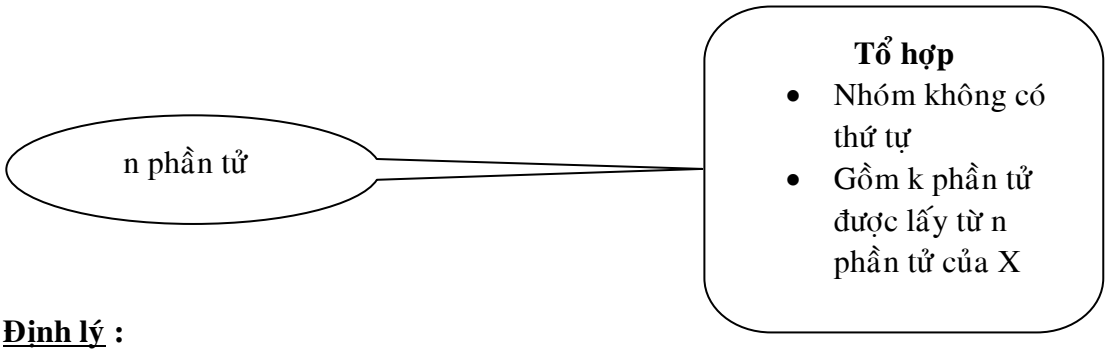
<u>Ví dụ</u>: Có bao nhiêu số có 3 chữ số gồm toàn các chữ số lẻ khác nhau ?

V. <u>TỔ HỢP</u>:

<u>Ví dụ</u>: Cho tập hợp X= $\{1,2,3\}$.Viết tất cả các tập con của X gồm 2 phần tử

1.<u>Định nghĩa</u>:

Cho tập hợp X gồm n phần tử .**Mỗi tập con của gồm k phần tử** ($0 \le k \le n$) **của X** được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho.



2. <u>Định lý</u> :

Ký hiệu số tổ hợp chập k của n phần tử là C_n^k , ta có công thức:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

<u>Ví dụ 1</u>: Một lô hàng gồm 10 sản phẩm. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 3 sản phẩm

<u>Ví dụ 2</u>: Trong mặt phẳng cho 7 điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo thành .

3.<u>Một số công thức về tổ hợp</u>:

Tổ hợp có hai tính chất quan trọng sau đây:

a) $C_n^k = C_n^{n-k}$ với mọi k = 0,1,...,n

b) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ với mọi k = 0,1,...,n-1

VI. NHỊ THỨC NIU TƠN:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^n a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

Ví dụ 1 : Khai triển $(x+2)^6$

Ví dụ 2 : Chứng minh rằng :

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$$

LƯU Ý QUAN TRỌNG:

Các bài toán về giải tích tổ hợp thường là những bài tóan về những hành động như :
lập các số từ các số đã cho ,sắp xếp một số người hay đồ vật vào những vị trí nhất định ,
lập các nhóm người hay đồ vật thỏa mãn một số điều kiện đã cho v.v...

1. Nếu những hành động này gồm nhiều giai đọan thì cần tìm số cách chọn cho mỗi giai đọan rồi áp dụng quy tắc nhân.
2. Những bài toán mà kết quả thay đổi nếu ta thay đổi vị trí của các phần tử , thì đây là những bài toán liên quan đến hoán vị và chỉnh hợp.
3. Đối với những bài toán mà kết quả được giữ nguyên khi ta thay đổi vị trí của các phần tử thì đây là những bài toán về tổ hợp.

Luyện tập

Bài 1: Từ các chữ số 1,2,3,4,5,6 có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số

a) Các chữ số không cần khác nhau
b) Các chữ số khác nhau
c) Số đầu và số cuối trùng nhau, khác với 3 số giữa.

Bài 2: Từ các chữ số 0,1,2,3,4,5 có thể lập được bao nhiêu

a) Số có 3 chữ số
b) Số có 3 chữ số khác nhau
c) Số chẵn có 3 chữ số khác nhau
d) Số nhỏ hơn 2005, khác 0

Bài 3: Có bao nhiêu cách xếp 7 người ngồi vào một dãy bàn có có bảy chổ ngồi

Bài 4: Một lớp học có 20 nam, 10 nữ. Có bao nhiêu cách chọn 3 người trực lớp

a) Một cách tùy ý.
b) Có đúng một nữ
c) Có ít nhất một nữ
d) Có nhiều nhất hai nữ

Bài 5: Một lớp học có 20 nam, 10 nữ. Có bao nhiêu cách chọn một ban cán sự gồm 1 lớp trưởng, 1 lớp phó học tập, 1 lớp phó phong trào

a) Một cách tuỳ ý
b) Lớp trưởng là nữ
c) Có đúng một nữ
d) Có ít nhất một nữ

Bài 6: Cho n điểm $A_1,A_2,...,A_n$ thuộc đường thẳng a và một điểm B không thuộc đường thẳng a. Nối B với $A_1,A_2,...,A_n$. Hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo thành?

Bài 7: Trên đường tròn cho n điểm $A_1,A_2,...,A_n$.Hỏi nếu lấy các điểm này làm đỉnh thì:

a) Xác định được bao nhiêu tam giác

b) Xác định được bao nhiêu tứ giác lồi

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

I. CÁC BÀI TOÁN VỀ PHÉP ĐẾM:

Bài 1:Từ 7 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể thành lập được bao nhiêu số chẵn , mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau từng đôi. KQ: 1260

Bài 2: Một tổ gồm 8 nam và 6 nữ . Cần lấy một nhóm 5 người trong đó có 2 nữ . Hỏi có bao nhiêu cách chọn. KQ: 840

Bài 3: Cho hai đường thẳng song song (d_1) , (d_2) . Trên (d_1) lấy 17 điểm phân biệt , trên (d_2) lấy 20 điểm phân biệt . Tính số tam giác có các đỉnh là 3 điểm trong số 37 điểm đã chọn trên (d_1) và (d_2) . KQ:5950

Bài 4: Từ một tập thể gồm 12 học sinh ưu tú , người ta cần cử một đoàn đi dự trại hè quốc tế trong đó có một trưởng đoàn , 1 phó đoàn và 3 đoàn viên . Hỏi có bao nhiêu cách cử ? KQ: 15840

Bài 5: Xét dãy gồm 7 chữ số , mỗi chữ số được chọn từ các số 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 thoả mãn các điều kiện sau :

- Chữ số vị trí số 3 là số chẵn
- Chữ số cuối cùng không chia hết cho 5
- Các chữ số ở vị trí 4,5,6 đôi một khác nhau

Hỏi có bao nhiêu cách chọn . KQ:2.880.000

Bài 6: Người ta viết các số có 6 chữ số bằng các chữ số 1,2,3,4,5 như sau: Trong mỗi số được viết có một chữ số xuất hiện hai lần còn các chữ số còn lại xuất hiện một lần . Hỏi có bao nhiêu số như vậy. KQ:1800

Bài 7: Cho tập hợp $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

a) Có bao nhiêu tập hợp con X của tập A thoả điều kiện chứa một và không chứa 2 ?

b) Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số đôi một khác nhau lấy từ tập A và không bắt đầu bởi 123? KQ: a) 64 b) 3348

Bài 8: Với 6 chữ số phân biệt 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số có các chữ số phân biệt trong đó mỗi số điều phải có mặt số 6. KQ: 1630

Bài 9: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau từng đôi sao cho tất cả các chử số đều khác không và có mặt đồng thời các chữ số 2, 4, 5. KQ: 1800

Bài 10: Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số gồm 10 chữ số được chọn từ 8 chữ số trên , trong đó chữ số 6 có mặt đúng 3 lần , các chữ số khác có mặt đúng 1 lần . KQ: 544.320

Bài 11: Có 9 viên bi xanh , 5 viên bi đỏ , 5 viên bi vàng có kích thước đôi một khác nhau .

1) Có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi trong đó có đúng 2 viên bi đỏ ? KQ:10.010

2) Có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi trong đó số bi xanh bằng số bi đỏ? KQ:4.665

Bài 12: Một hộp đựng 4 viên bi đỏ , 5 viên bi trắng và 6 viên bi vàng . Người ta chọn ra 4 viên bi từ hộp đó . Hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong số bi lấy ra không đủ cả 3 màu. KQ:645

Bài 13: Cho 8 chữ số 0,1,2,3,4,5,6,7 .Từ 8 chữ số số trên có thể lập được bao nhiêu số , mỗi số gồm 4 chữ số đôi một khác nhau và mỗi số đều không chia hết cho 10. KQ: 1260

Bài 14:Hỏi từ 10 chữ số 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau sao cho trong các chữ số đó có mặt số 0 và số 1. KQ:42000

Bài 15: Có bao nhiêu số chẵn gồm 6 chữ số khác nhau từng đôi một trong đó có chữ số đầu tiên là số lẻ?

KQ: 42000

Bài 16: Có bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau từng đôi một trong đó có đúng 3 chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn (chữ số đầu tiên phải khác không). KQ:64800

Bài 17: Trong mặt phẳng cho đa giác đều H có 20 cạnh . Xét các tam giác có đúng 3 đỉnh được lấy từ các đỉnh của H .

1) Có bao nhiêu tam giác như vậy? Có bao nhiêu tam giác mà có đúng hai cạnh là hai cạnh của H . KQ:20

2) Có bao nhiêu tam giác có đúng một cạnh là cạnh của H? KQ:320
Có bao nhiêu tam giác không có cạnh nào là cạnh của H? KQ:800

Bài 18: Một lớp học có 20 học sinh , trong đó có hai cán bộ lớp . Hỏi có bao nhiêu cách cử 3 người đi dự Hội nghị sinh viên của trường sao cho trong 3 người đó có ít nhất một cán bộ lớp . KQ:324

Bài 19: Có 5 nhà toán học nam , 3 nhà toán học nữ và 4 nhà vật lý nam . Lập một đoàn công tác 3 người cần có cả nam và nữ , cần có cả nhà toán học và nhà vật lý . Hỏi có bao nhiêu cách.
KQ:90

Bài 20: Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ ($n \geq 2$, n nguyên) nội tiếp trong (O). Biết rằng số tam giác có đỉnh là 3 trong 2n điểm $A_1, A_2,..., A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1, A_2,..., A_{2n}$. Tìm n.

Bài 21: Cho tập hợp $A = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số có sáu chữ số khác nhau sao cho các số này chia hết cho 5 và có đúng 3 chữ số lẻ?

Bài 22: Cho tập hợp $A = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số có sáu chữ số khác nhau sao cho luôn có mặt hai chữ số 0 và 3?

Bài 23: Cho tập hợp $A = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số có sáu chữ số khác nhau sao cho chữ số thứ ba chia hết cho 3 và chữ số cuối chẵn?

Bài 24: Cho tập hợp $A = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số có sáu chữ số khác nhau sao cho các số này chia hết cho 2 và có đúng 3 chữ số lẻ?

Bài 25: Cho tập hợp $A = \{0;1;2;3;4;5;6;7\}$. Từ A có thể lập được bao nhiêu số :

a) Có năm chữ số khác nhau và chữ số 7 luôn có mặt một lần

b) Có sáu chữ số sao cho các số này luôn lẻ; chữ số đứng ở vị trí thứ ba luôn chia hết cho 6?

Bài 26: Cho tập hợp $A = \{0;1;2;3;4;5;6;7;;8;9\}$. Từ A có thể lập được bao nhiêu số :

a) Có sáu chữ số khác nhau sao cho luôn có mặt hai chữ số 0 và 3

b) Có bảy chữ số khác nhau sao cho luôn có mặt hai chữ số 2 và 5

Bài 27: Một trường trung học có 8 thầy dạy toán, 5 thầy dạy vật lý, và ba thầy dạy hóa học. Chọn từ đó ra một đội có 4 thầy dự đại hội. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để có đủ ba bộ môn?

Bài 28: Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 4$) . Biết rằng, số tập con gồm 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập con gồm 2 phần tử của A. Tìm $k \in \{1,2,..,n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất

Bài 29: Đội thanh nhiên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B, và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

Bài 30: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau ? Tính tổng của tất cả các số đó.

Bài 31: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số, chữ số 0 có mặt đúng 2 lần, chữ số 1 có mặt đúng một lần, hai chữ số còn lại phân biệt

II. CÁC BÀI TOÁN GIẢI PT,BPT,HPT:

Bài 1: Giải phương trình : $P_x A_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x)$

Bài 2: Giải phương trình: $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$

Bài 3:Giải phương trình: $x^2 C_{x-1}^{x-4} = A_4^2 C_{x-1}^3 - xC_{x-1}^{x-4}$

Bài 4: Giải bất phương trình: $C_{x-1}^4 - C_{x-1}^3 - \frac{5}{4}A_{x-2}^2 \le 0$

Bài 5: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y + 2C_x^y = 80 \end{cases}$

Bài 6: Giải hệ phương trình: a) $\begin{cases} C_{x+1}^{y+1} = C_{x+1}^y \\ 3C_{x+1}^y = 5C_{x+1}^{y-1} \end{cases}$ $(x \ge y)$ b) $\begin{cases} C_y^x : C_{y+2}^x = \frac{1}{3} \\ C_y^x : A_y^x = \frac{1}{24} \end{cases}$

Bài 7: Tìm các số nguyên dương m, n thỏa mãn: $C_{n+1}^{m+1} : C_{n+1}^m : C_{n+1}^{m-1} = 5:5:3$

III. CÁC BÀI TOÁN VỀ NHỊ THỨC NIU-TƠN:

Bài 1: Tìm hệ số của số hạng chứa x^{43} trong khai triển $\left(\sqrt{x^5} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^{21}$

Bài 2: Biết tổng hệ số của ba số hạng đầu tiên trong khai triển $\left(x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[15]{x^{28}}}\right)^n$ bằng 79. Tìm số hạng không chứa x

Bài 3: Cho khai triển $\left(\sqrt{x^3} + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$. Biết tổng hệ số của ba số hạng đầu tiên trong khai triển trên bằng 631. Tìm hệ số của số hạng có chứa x^5.

Bài 4: Tìm giá trị của x sao cho trong khai triển của $\left(\sqrt{2^x} + \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^n$ (n là số nguyên dương) có số hạng thứ 3 và thứ 5 có tổng bằng 135, còn các hệ số của ba số hạng cuối của khai triển đó có tổng bằng 22

Bài 5: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển : $P(x) = \left(1 + 2x - \frac{1}{x^2}\right)^9$

Bài 6: Chứng minh rằng: $C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k$ với $3 \le k \le n$

Bài 7: Chứng minh rằng : $C_n^1 + 2.\frac{C_n^2}{C_n^1} + 3.\frac{C_n^3}{C_n^2} + ... + k.\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} + ... + n.\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = \frac{n(n+1)}{2}$

Bài 8: Chứng minh rằng : $2^n C_n^0 + 2^{n-1}.7^1.C_n^1 + 2^{n-2}.7^2.C_n^2 + ... + 7^n C_n^n = 9^n$

Bài 9: Chứng minh rằng : $n2^{n-1}C_n^0 + (n-1)2^{n-2}.3.C_n^1 + (n-2)2^{n-3}.3^2.C_n^2 + ... + 3^{n-1}C_n^{n-1} = n.5^{n-1}$

Bài 10: Chứng minh rằng: $2C_n^0 + \frac{2^2}{2}C_n^1 + \frac{2^3}{3}C_n^2 + ... + \frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}$

Bài 11: Tính tổng : $S = C_{2005}^0 + 2C_{2005}^1 + 3C_{2005}^2 + ... + C_{2005}^{2005}$

Bài 12: Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức Niutơn của $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n$, biết rằng

$$C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$$

Bài 13: Tính tổng $S = \frac{1.C_n^0}{A_1^1} + \frac{2.C_n^1}{A_2^1} + \frac{3.C_n^2}{A_3^1} + ... + \frac{(n+1).C_n^n}{A_{n+1}^1}$, biết rằng $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 211$

Bài 14: Khai triển biểu thức $(1-2x)^n$ ta được đa thức có dạng $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Tìm hệ số của x^5, biết $a_0 + a_1 + a_2 = 71$

Bài 15: Tìm hệ số của $x^{29}y^8$ trong khai triển của $\left(x^3 - xy\right)^{15}$

Bài 16: Tìm n$\in N$ sao cho : $C_{4n+2}^0 + C_{4n+2}^1 + C_{4n+2}^2 + ... + C_{4n+2}^{2n} = 256$

Bài 17: Tìm số tự nhiên n sao cho : $\frac{1}{C_4^n} - \frac{1}{C_5^n} = \frac{1}{C_6^n}$

Bài 18: Chứng minh rằng $C_n^3 3^n - C_n^1 3^{n-1} + ... + (-1)^n C_n^n = C_n^0 + C_n^1 + ...C_n^n$

Bài 19: Cho $A = (x - \frac{1}{x^2})^{20} + (x^3 - \frac{1}{x})^{10}$. Sau khi khai triển và rút gọn thì biểu thức A sẽ gồm bao nhiêu số hạng?

Bài 20: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn đẳng thức sau:

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + ... + C_{2n}^{2k} 3^{2k} + ... + C_{2n}^{2n-2} 3^{2n-2} + C_{2n}^{2n} 3^{2n} = 2^{15}(2^{16} + 1)$$

----------Hết----------