# Chuyên đề 2 : HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

## TÓM TẮT GIÁO KHOA

### I. Hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn

#### 1. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

**a. Dạng** :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Cách giải đã biết: Phép thế, phép cộng ...

**b. Giải và biện luận phương trình :** Quy trình giải và biện luận

**Bước 1:** Tính các định thức :

- $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ (gọi là định thức của hệ)
- $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$ (gọi là định thức của x)
- $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$ (gọi là định thức của y)

**Bước 2:** Biện luận

- Nếu $D \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases}$
- Nếu D = 0 và $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$ thì hệ vô nghiệm
- Nếu $D = D_x = D_y = 0$ thì hệ có vô số nghiệm hoặc vô nghiệm

**Ý nghĩa hình học**: Giả sử ($d_1$) là đường thẳng $a_1x + b_1y = c_1$
($d_2$) là đường thẳng $a_2x + b_2y = c_2$

Khi đó:
1. Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ ($d_1$) và ($d_2$) cắt nhau
2. Hệ (I) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ ($d_1$) và ($d_2$) song song với nhau
3. Hệ (I) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow$ ($d_1$) và ($d_2$) trùng nhau

**Áp dụng:**

**Ví dụ1:** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 5x - 2y = -9 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$

**Ví dụ 2:** Giải và biện luận hệ phương trình : $\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$

**Ví dụ 3:** Cho hệ phương trình : $\begin{cases} mx + 2y = 3 \\ x + my = 1 \end{cases}$

Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất (x;y) thỏa x >1 và y > 0

$(-\sqrt{2} < m < 0)$

**Ví dụ 4:** Với giá trị nguyên nào của tham số m hệ phương trình $\begin{cases} mx + 4y = m + 2 \\ x + my = m \end{cases}$ có nghiệm duy nhất (x;y) với x, y là các số nguyên.

$(m = -1 \vee m = -3)$

## II. Hệ phương trình bậc hai hai ẩn:

### 1. Hệ gồm một phương trình bậc nhất và một phương trình bậc hai hai ẩn:

**Ví dụ :** Giải hệ: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x^2 + 2y^2 - 2xy = 5 \end{cases}$

**Cách giải**: Giải bằng phép thế

### 2. Hệ phương trình đối xứng :

#### 1. Hệ phương trình đối xứng loại I:

**a. Định nghĩa**: Đó là hệ chứa hai ẩn x,y mà khi ta thay đổi vai trò x,y cho nhau thì hệ phương trình không thay đổi.

**b. Cách giải:**

**Bước 1**: Đặt x+y=S và xy=P với $S^2 \geq 4P$ ta đưa hệ về hệ mới chứa hai ẩn S,P.
**Bước 2**: Giải hệ mới tìm S,P . Chọn S,P thoả mãn $S^2 \geq 4P$ .
**Bước 3**: Với S,P tìm được thì x,y là nghiệm của phương trình :
$X^2 - SX + P = 0$ ( định lý Viét đảo ).

**Chú ý:** Do tính đối xứng, cho nên nếu $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ thì $(y_0;x_0)$ cũng là nghiệm của hệ

**Áp dụng:**

**Ví du 1:** Giải các hệ phương trình sau :

1) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ xy + x + y = 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y + xy = -7 \\ x^2 + y^2 - 3x - 3y = 16 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy + x + y = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 3(x+y) + 2xy + 9 = 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6 \\ x^2y + xy^2 = 20 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \\ x + y - \sqrt{xy} = 4 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 34 \\ x + y = 2 \end{cases}$

1) (0;2); (2;0) 2) $(2;-3),(-3;2),(1+\sqrt{10};1-\sqrt{10}),(1-\sqrt{10};1+\sqrt{10})$ 3) $(1;5),(5;1),(2;3),(3;2)$

4) $(3;-2),(-2;3),(-2+\frac{\sqrt{10}}{2};-2-\frac{\sqrt{10}}{2}),(-2-\frac{\sqrt{10}}{2};-2+\frac{\sqrt{10}}{2})$ 5) $(2;3);(3;2)$ 6) $(1;4),(4;1)$

7) (4;4) 8) $(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}),(1+\sqrt{2};1-\sqrt{2})$

**Ví dụ2 :** Với giá trị nào của m thì hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases}$

**2. Hệ phương trình đối xứng loại II**:

**a.Định nghĩa:** Đó là hệ chứa hai ẩn x,y mà khi ta thay đổi vai trò x,y cho nhau thì phương trình nầy trở thành phương trình kia của hệ.

**b. Cách giải:**

- Trừ vế với vế hai phương trình và biến đổi về dạng phương trình tích số.
- Kết hợp một phương trình tích số với một phương trình của hệ để suy ra nghiệm của hệ .

**Áp dụng:**

**Ví dụ:** Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases} 2x^2 + y = 3y^2 - 2 \\ 2y^2 + x = 3x^2 - 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 + xy = 3x \\ 2y^2 + xy = 3y \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x \\ x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x + y = \dfrac{1}{x^2} \\ 3y + x = \dfrac{1}{y^2} \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3y = \dfrac{y^2 + 2}{x^2} \\ 3x = \dfrac{x^2 + 2}{y^2} \end{cases}$

**III. Hệ phương trình đẳng cấp bậc hai:**

**a. Dạng** : $\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}$

**b. Cách giải**:

Đặt ẩn phụ $\dfrac{x}{y} = t$ hoặc $\dfrac{y}{x} = t$. Giả sử ta chọn cách đặt $\dfrac{x}{y} = t$.

**Khi đó ta có thể tiến hành cách giải như sau:**

**Bước 1:** Kiểm tra xem (x,0) có phải là nghiệm của hệ hay không ?

**Bước 2:** Với $y \neq 0$ ta đặt x = ty. Thay vào hệ ta được hệ mới chứa 2 ẩn t,y .Từ 2 phương trình ta khử y để được 1 phương trình chứa t .

**Bước 3:** Giải phương trình tìm t rồi suy ra x,y.

**Áp dụng:**

**Ví dụ:** Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 5y^2 = 25 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x^2 - xy - 2y^2 = 56 \\ 5x^2 - xy - y^2 = 49 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x^3 + 3x^2y = 5 \\ y^3 + 6xy^2 = 7 \end{cases}$

**IV. Các hệ phương trình khác**:

Ta có thể sử dụng các phương pháp sau:

**a. Đặt ẩn phụ**:

**Ví dụ** : Giải các hệ phương trình :

1) $\begin{cases} xy - x + y = -3 \\ x^2 + y^2 - x + y + xy = 6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 12 \\ x(x-1)y(y-1) = 36 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - y^2 + x - y = 5 \\ x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = 6 \end{cases}$

**b. <u>Sử dụng phép cộng và phép thế</u>:**

**<u>Ví dụ</u>:** Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2+y^2-10x=0 \\ x^2+y^2+4x-2y-20=0 \end{cases}$

**c. <u>Biến đổi về tích số</u>:**

**<u>Ví dụ</u> :** Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases} x^2+x=y^2+y \\ x^2+y^2=3(x+y) \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3+7x=y^3+7y \\ x^2+y^2=x+y+2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}=y-\dfrac{1}{y} \\ 2y=x^3+1 \end{cases}$

--------------------------Hết------------------------