



Chuyên đề 10:

MŨ, LOGARIT

✓ **Vấn đề 1:**

PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Dạng 1: Dạng cơ bản: với $0 < a \neq 1$

$$a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$$

Dạng 2: Đưa về cùng cơ số: $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (1)

- Nếu $0 < a \neq 1$: (1) $\Leftrightarrow f(x) = g(x)$
- Nếu a thay đổi: (1) $\begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x) - g(x)] = 0 \end{cases}$

Dạng 3: Đặt ẩn phụ: Đặt $t = a^x, t > 0$; giải phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ g(t) = 0 \end{cases}$

Dạng 4: Đoán nghiệm và chứng minh nghiệm đó duy nhất.

PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

Điều kiện tồn tại $\log_a f(x)$ là $\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) > 0 \end{cases}$

Dạng 1: $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = a^b \end{cases}$

Dạng 2: Đưa về cùng cơ số: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

Dạng 3: Đặt ẩn phụ

Đặt $t = \log_a x$ sau đó giải phương trình đại số theo t

Dạng 4: Đoán nghiệm và chứng minh nghiệm duy nhất

B. ĐỀ THI

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2011

Giải phương trình: $\log_2(8 - x^2) + \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) - 2 = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Giải

$\log_2(8 - x^2) + \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) - 2 = 0$. Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$.

$$\Leftrightarrow \log_2(8-x^2) = \log_2(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) + 2 \Leftrightarrow 8-x^2 = 4(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) \quad (*).$$

Với $-1 \leq x \leq 1$ thì hai vế của (*) không âm nên bình phương hai vế của (*) ta được: $(*) \Leftrightarrow (8-x^2)^2 = 16(2+2\sqrt{1-x^2}) \Leftrightarrow (8-x^2)^2 = 32(1+\sqrt{1-x^2}) \quad (1).$

Đặt $t = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow t^2 = 1-x^2 \Rightarrow x^2 = 1-t^2$, (1) trở thành:

$$(7+t^2)^2 = 32(1+t) \Leftrightarrow t^4 + 14t^2 - 32t + 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^3 - t^2 + 15t - 17) = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2(t^2 + 2t + 17) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Do đó (1) $\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0$ (Thỏa điều kiện $-1 \leq x \leq 1$).

Vậy, phương trình đã cho có một nghiệm $x = 0$.

Bài 2: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2011

Giải bất phương trình $4^x - 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2x-3}} - 4^{1+\sqrt{x^2-2x-3}} > 0$

Giải

$$4^x - 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2x-3}} - 4^{1+\sqrt{x^2-2x-3}} > 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 3 \cdot 2^x \cdot 2^{\sqrt{x^2-2x-3}} - 4 \cdot 2^{2\sqrt{x^2-2x-3}} > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 3 \cdot 2^{\sqrt{x^2-2x-3}-x} - 4 \cdot 2^{2(\sqrt{x^2-2x-3}-x)} > 0 \quad (1)$$

Đặt $t = 2^{\sqrt{x^2-2x-3}-x} > 0$ (*)

(1) thành $1 - 3t - 4t^2 > 0 \Leftrightarrow 4t^2 + 3t - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < t < \frac{1}{4}$

Do đó bất phương trình đã cho tương đương: $2^{\sqrt{x^2-2x-3}-x} < \frac{1}{4} = 2^{-2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x-3} - x < -2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x-3} < x-2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \Leftrightarrow 3 \leq x < \frac{7}{2}.$$

Bài 3: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2010

Giải phương trình $4^{2x+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3} = 4^{2+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3+4x-4} \quad (x \in \mathbb{R})$

Giải

$$4^{2x+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3} = 4^{2+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3+4x-4} \quad (*); \text{ Điều kiện : } x \geq -2.$$

$$(*) \Leftrightarrow 4^{2+\sqrt{x+2}}(2^{4x-4} - 1) - 2^{x^3}(2^{4x-4} - 1) = 0 \Leftrightarrow (2^{4x-4} - 1)(4^{2+\sqrt{x+2}} - 2^{x^3}) = 0$$

Do đó phương trình (*) có hai trường hợp.

- $2^{4x-4} = 1 \Leftrightarrow 4x-4=0 \Leftrightarrow x=1$ (nhận)

$$\begin{aligned} \bullet \quad 2^{4+2\sqrt{x+2}} = 2^{x^3} &\Leftrightarrow x^3 = 2\sqrt{x+2} + 4 \Leftrightarrow x^3 - 8 = 2(\sqrt{x+2} - 2) \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4) = \frac{2(x-2)}{\sqrt{x+2} + 2} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ (nhận)} \\ x^2 + 2x + 4 = \frac{2}{\sqrt{x+2} + 2} \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét: Phương trình (1) có:

$$VT = x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 \geq 3; \quad VP = \frac{2}{\sqrt{x+2} + 2} \leq 1$$

Suy ra phương trình (1) vô nghiệm.

Vậy : (*) chỉ có hai nghiệm $x = 1; x = 2$.

Bài 4: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2008

Giải phương trình $\log_2^2(x+1) - 6\log_2 \sqrt{x+1} + 2 = 0$

Giải

$$\log_2^2(x+1) - 6\log_2 \sqrt{x+1} + 2 = 0 \quad (1)$$

Điều kiện $x > -1$

$$(1) \Leftrightarrow \log_2^2(x+1) - 3\log_2(x+1) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x+1) = 1 \\ \log_2(x+1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 2 \\ x+1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bài 5: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2008

Giải phương trình $\log_{2x-1}(2x^2 + x - 1) + \log_{x+1}(2x - 1)^2 = 4$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 0 < 2x - 1 \neq 1 \\ 2x^2 + x - 1 > 0 \\ 0 < x + 1 \neq 1 \\ (2x - 1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \\ \frac{1}{2} < x \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_{2x-1}(2x^2 + x - 1) + \log_{x+1}(2x - 1)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \log_{2x-1}(2x - 1)(x + 1) + \log_{x+1}(2x - 1)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 1 + \log_{2x-1}(x + 1) + 2\log_{x+1}(2x - 1) = 4$$

$$\text{Đặt: } t = \log_{2x-1}(x + 1) \Rightarrow \log_{x+1}(2x - 1) = \frac{1}{\log_{2x-1}(x + 1)} = \frac{1}{t}$$

$$\text{Ta có phương trình ẩn } t \text{ là: } 1 + t + \frac{2}{t} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

- Với $t = 1 \Leftrightarrow \log_{2x-1}(x+1) = 1 \Leftrightarrow x+1 = 2x-1 \Leftrightarrow x = 2$ (nhận)
- Với $t = 2 \Leftrightarrow \log_{2x-1}(x+1) = 2 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{loại}) \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$

Nghiệm của phương trình là: $x = 2$ và $x = \frac{5}{4}$.

Bài 6: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2007

$$\text{Giải phương trình: } \log_2(4^x + 15 \cdot 2^x + 27) + 2\log_2 \frac{1}{4 \cdot 2^x - 3} = 0$$

Giải

Điều kiện: $4 \cdot 2^x - 3 > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\log_2(4^x + 15 \cdot 2^x + 27) = \log_2(4 \cdot 2^x - 3)^2 \Leftrightarrow 5 \cdot (2^x)^2 - 13 \cdot 2^x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = -\frac{2}{5} & (\text{loại}) \\ 2^x = 3 \end{cases}$$

Do $2^x > 0$ nên $2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$ (thỏa mãn điều kiện)

Bài 7: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2007

$$\text{Giải phương trình: } (\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0$$

Giải

Đặt $(\sqrt{2}-1)^x = t$ ($t > 0$), khi đó phương trình trở thành:

$$t + \frac{1}{t} - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2} - 1, t = \sqrt{2} + 1$$

Với $t = \sqrt{2} - 1$ ta có $x = 1$. Với $t = \sqrt{2} + 1$ ta có $x = -1$.

Bài 8: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2006

$$\text{Giải phương trình: } 2^{x^2+x} - 4 \cdot 2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$$2^{2x}(2^{x^2-x} - 1) - 4(2^{x^2-x} - 1) = 0 \Leftrightarrow (2^{2x} - 4)(2^{x^2-x} - 1) = 0$$

- $2^{2x} - 4 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^2 \Leftrightarrow x = 1$.
- $2^{x^2-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0, x = 1$.

Bài 9: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2006

Giải phương trình: $3 \cdot 8^x + 4 \cdot 12^x - 18^x - 2 \cdot 27^x = 0$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với: $3\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + 4\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0$ (1)

Đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ ($t > 0$), phương trình (1) trở thành $3t^3 + 4t^2 - t - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (t+1)^2(3t-2) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \quad (\text{vì } t > 0).$$

Với $t = \frac{2}{3}$ thì $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3}$ hay $x = 1$.

Bài 10: ĐỀ DỰ BỊ 2

Giải phương trình: $\log_5(5^x - 4) = 1 - x$

Giải

Điều kiện: $5^x - 4 > 0$ (a)

- Dễ thấy $x = 1$ là nghiệm của (1)
- VT: $f(x) = \log_5(5^x - 4)$ là hàm số đồng biến
- VP: $g(x) = 1 - x$ là hàm số nghịch biến

Do đó $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Bài 11:

Giải phương trình $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3$.

Giải

Đặt $t = 2^{x^2-x}$ ($t > 0$)

$$2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3 \Leftrightarrow t - \frac{4}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 & (\text{loại}) \\ t = 4 & (\text{nhận}) \end{cases}$$

Vậy $2^{x^2-x} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$.

Bài 12:

Cho phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ (2): (m là tham số).

1/ Giải phương trình (2) khi $m = 2$.

2/ Tìm m để phương trình (2) có ít nhất 1 nghiệm thuộc đoạn $[1; 3\sqrt{3}]$.

Giải

1/ Khi $m = 2$ thì phương trình (2) trở thành $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 = 0$

Điều kiện $x > 0$. Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1} \geq 1$

$$(2) \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = -3 \text{ (loại)}$$

$$\bullet t = 2 \Rightarrow \log_3 x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 3^{\pm\sqrt{3}}$$

2/ $1 \leq x \leq 3^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 1 \leq \log_3^2 x + 1 \leq 4 \Rightarrow 1 \leq t \leq 2$.

Phương trình (2) có ít nhất 1 nghiệm thuộc $[1; 3^{\sqrt{3}}]$

$$\Leftrightarrow 2m = t^2 + t - 2 = f(t) \text{ có nghiệm } t \in [1, 2]$$

Vì f tăng trên $[1, 2]$ nên ycbt $\Leftrightarrow f(1) \leq 2m \leq f(2) \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$.

✓ Vấn đề 2: BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT**A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI****BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ**

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad (1)$$

- Nếu $a > 1$: (1) $\Leftrightarrow f(x) > g(x)$
- Nếu $0 < a < 1$: (1) $\Leftrightarrow f(x) < g(x)$

$$\text{Tổng quát: } \bullet a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0; a \neq 1 \\ (a-1)(f(x)-g(x)) > 0 \end{cases}$$

$$\bullet a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x)-g(x)] \geq 0 \end{cases}$$

BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \quad (1)$$

- Nếu $a > 1$: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$
- Nếu $0 < a < 1$: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > f(x) \end{cases}$

B. ĐỀ THI**Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2008**

$$\text{Giải bất phương trình: } \log_{0,7} \left(\log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} \right) < 0$$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \frac{x^2+x}{x+4} > 0 \\ \log_6 \frac{x^2+x}{x+4} > 0 \end{cases}$$

$$\text{Bất phương trình tương đương với } \log_{0,7} \left(\log_6 \frac{x^2+x}{x+4} \right) < \log_{0,7} 1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \log_6 \frac{x^2+x}{x+4} > 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x+4} > 6 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x-24}{x+4} > 0 \\ &\Leftrightarrow -4 < x < -3 \text{ hay } x > 8 \end{aligned}$$

Bài 2: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2008

Giải bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2-3x+2}{x} \geq 0$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \frac{x^2-3x+2}{x} > 0$$

$$\text{Bất phương trình tương đương với } \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2-3x+2}{x} \geq \log_{\frac{1}{2}} 1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x} > 0 \\ \frac{x^2-3x+2}{x} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x} > 0 \\ \frac{x^2-4x+2}{x} \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-3x+2)x > 0 \\ (x^2-4x+2)x \leq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \vee x > 2 \\ x < 0 \vee 2 - \sqrt{2} \leq x \leq 2 + \sqrt{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow 2 - \sqrt{2} \leq x < 1 \vee 2 < x \leq 2 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Bài 3: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2007

Giải bất phương trình: $2\log_3(4x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) \leq 2$

Giải

$$\text{Điều kiện: } x > \frac{3}{4}. \text{ Bất phương trình đã cho } \Leftrightarrow \log_3 \frac{(4x-3)^2}{2x+3} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow (4x-3)^2 \leq 9(2x+3) \Leftrightarrow 16x^2 - 42x - 18 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{8} \leq x \leq 3$$

Kết hợp điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là: $\frac{3}{4} < x \leq 3$.

Bài 4: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2006

Giải bất phương trình: $\log_5(4^x + 144) - 4\log_5 2 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1)$.

Giải

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\log_5(4^x + 144) - \log_5 16 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1) \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \log_5(4^x + 144) < \log_5 16 + \log_5 5 + \log_5(2^{x-2} + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_5(4^x + 144) < \log_5[80(2^{x-2} + 1)]$$

$$\Leftrightarrow 4^x + 144 < 80(2^{x-2} + 1) \Leftrightarrow 4^x - 20 \cdot 2^x + 64 < 0$$

$$\Leftrightarrow 4 < 2^x < 16 \Leftrightarrow 2 < x < 4$$

Bài 5: ĐỀ DỰ BỊ 2

Giải phương trình: $\log_5(5^x - 4) = 1 - x$

Giải

Điều kiện: $5^x - 4 > 0$ (a)

- Để thấy $x = 1$ là nghiệm của (1)
- VT: $f(x) = \log_5(5^x - 4)$ là hàm số đồng biến
- VP: $g(x) = 1 - x$ là hàm số nghịch biến

Do đó $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 6:

Giải bất phương trình: $\log_x \left[\log_3(9^x - 72) \right] \leq 1$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ 9^x - 72 > 0 \\ \log_3(9^x - 72) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \log_9 73$$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \log_3(9^x - 72) < x$ (Vì $x > \log_9 73 > 1$)

$$\Leftrightarrow 9^x - 3^x - 72 < 0 \Leftrightarrow -8 \leq 3^x \leq 9 \Leftrightarrow x \leq 2$$

Kết hợp với điều kiện ta được $\log_9 73 < x \leq 2$.

✓ **Vấn đề 3: HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT**

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Thường sử dụng phương pháp biến đổi từng phương trình trong hệ, sau đó dùng phương pháp thế để tìm nghiệm.

B. ĐỀ THI

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2010

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_2(3y - 1) = x \\ 4^x + 2^x = 3y^2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện: $3y - 1 > 0$

Ta có
$$\begin{cases} \log_2(3y - 1) = x \\ 4^x + 2^x = 3y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 1 = 2^x \\ 4^x + 2^x = 3y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2^x + 1}{3} \\ 4^x + 2^x = 3y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2^x + 1}{3} \\ 3(4^x + 2^x) = (2^x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2^x + 1}{3} \\ 2 \cdot 4^x + 2^x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2^x + 1}{3} \\ (2^x + 1)(2^x - \frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2^x + 1}{3} \\ 2^x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ (nhận)}$$

Bài 2: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2010

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 4x + y + 2 = 0 \\ 2 \log_2(x - 2) - \log_{\sqrt{2}} y = 0 \end{cases}$$

Giải

$$\begin{cases} x^2 - 4x + y + 2 = 0 & (1) \\ 2 \log_2(x - 2) - \log_{\sqrt{2}} y = 0 & (2) \end{cases}; \text{ Điều kiện: } x > 2, y > 0$$

$$(2) \Leftrightarrow (x - 2)^2 = y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ y = 2 - x \end{cases}$$

- $y = x - 2: (1) \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 3 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$

$$\bullet \quad y = 2 - x: (1) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = 4 \Rightarrow y = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy hệ có một nghiệm } \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Bài 3: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2009

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2(xy) \\ 3^{x^2 - xy + y^2} = 81 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Với điều kiện $xy > 0$ (*), hệ đã cho tương đương:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ x^2 - xy + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = \pm 2 \end{cases}$$

Kết hợp (*), hệ có nghiệm: $(x; y) = (2; 2)$ và $(x; y) = (-2; -2)$

Bài 4: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2006

Chứng minh rằng với mọi $a > 0$, hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} e^x - e^y = \ln(1+x) - \ln(1+y) \\ y - x = a \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $x, y > -1$. Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} e^{x+a} - e^x + \ln(1+x) - \ln(1+a+x) = 0 & (1) \\ y = x + a & (2) \end{cases}$$

Hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm duy nhất trong khoảng $(-1; +\infty)$.

Xét hàm số $f(x) = e^{x+a} - e^x + \ln(1+x) - \ln(1+a+x)$ với $x > -1$.

Do $f(x)$ liên tục trong khoảng $(-1; +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-1; +\infty)$.

$$\text{Mặt khác: } f'(x) = e^{x+a} - e^x + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+a+x}$$

$$= e^x(e^a - 1) + \frac{a}{(1+x)(1+a+x)} > 0, \quad \forall x > -1$$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-1; +\infty)$.

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất trong khoảng $(-1; +\infty)$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài 5: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2005

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 \\ 3\log_9(9x^2) - \log_3 y^3 = 3 \end{cases}$$

Giải

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 & (1) \\ 3\log_9(9x^2) - \log_3 y^3 = 3 & (2) \end{cases} \cdot \text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 1 \\ 0 < y \leq 2 \end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow 3(1 + \log_3 x) - 3\log_3 y = 3 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 y \Leftrightarrow x = y$.

Thay $y = x$ vào (1) ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 1 &\Leftrightarrow x-1+2-x+2\sqrt{(x-1)(2-x)} = 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(2-x)} = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 2. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện (*) hệ có hai nghiệm là $(x; y) = (1; 1)$ và $(x; y) = (2; 2)$.

Bài 6: ĐỀ DỰ BỊ 1 - ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2005

Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2005x \leq 2005 & (1) \\ x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x \geq -1$.

Ta có : (1) $\Leftrightarrow 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} \leq 2005(1-x)$

- Xét $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} \leq 0 \leq 2005(1-x)$
nên (1) đúng $\forall x \in [-1; 1]$
- Xét $x > 1 \Rightarrow 2x > 2 \Rightarrow 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} > 0 > 2005(1-x)$
nên (1) hiển nhiên sai. Do đó (1) $\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$
- Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi: (2) có nghiệm $x \in [-1; 1]$
 $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 \geq m(x-2)$ có nghiệm $x \in [-1; 1]$
 $\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 3}{x-2} \leq m$ (vì $x-2 < 0$) có nghiệm $x \in [-1; 1]$

Xét hàm $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x-2}, x \in [-1; 1]$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$$

x	$-\infty$	-1	$2 - \sqrt{3}$	1	2	$2 + \sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	-	-	+
$f(x)$		-2	↗ ↘	-2			

Dựa vào bảng biến thiên hệ có nghiệm $\Leftrightarrow -2 \leq m$

Bài 7: ĐỀ DỰ BỊ 1

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} y > 0 \\ y - x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x) + \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y-x}{y} = \frac{1}{4} \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \text{ (nhận)} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases} \text{ (loại)}$$

Bài 8:

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \frac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y \end{cases}$$

Giải

$$\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \frac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ 2^x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y^2 - 4y = y^3 \\ y = 2^x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 5y + 4 = 0 \\ y = 2^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Bài 9: ĐỀ DỰ BỊ 1

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} x - 4|y| + 3 = 0 & (1) \\ \sqrt{\log_4 x} - \sqrt{\log_2 y} = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \log_4 x = \log_4 y^2 \Leftrightarrow x = y^2. \text{ Thay } x = y^2 \text{ vào (1) ta được: } y^2 - 4|y| + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |y| = 1 \\ |y| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y = 3 \Rightarrow x = 9 \end{cases} \text{ (do } y \geq 1)$$

Vậy hệ có 2 cặp nghiệm (1; 1) và (9; 3).