BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

NGUYỄN VĂN HUẤN

CÁC ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN DẠNG LUẬT SỐ LỚN ĐỐI VỚI MẢNG CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

VINH - 2011

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

NGUYỄN VĂN HUẤN

CÁC ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN DẠNG LUẬT SỐ LỚN ĐỐI VỚI MẢNG CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Lý thuyết xác suất và Thống kê toán học

Mã số: 62. 46. 15. 01

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC: PGS. TS. NGUYỄN VĂN QUẢNG

VINH - 2011

LỜI CAM ĐOAN

Luận án này được hoàn thành tại Trường Đại học Vinh, dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Nguyễn Văn Quảng. Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Các kết quả trong luận án là trung thực, được các đồng tác giả cho phép sử dụng và chưa từng được ai công bố trước đó.

Tác giả

Nguyễn Văn Huấn

LỜI CẢM ƠN

Luận án này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn đầy trách nhiệm của PGS. TS. Nguyễn Văn Quảng. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thầy, người đã đặt bài toán, hướng dẫn, giúp đỡ tận tình, chu đáo trong suốt quá trình tác giả học tập và thực hiện luận án.

Trong quá trình hoàn thành luận án, tác giả đã nhận được sự quan tâm và góp ý của PGS. TS. Trần Xuân Sinh, TS. Nguyễn Trung Hòa, PGS. TS. Đinh Huy Hoàng, PGS. TS. Nguyễn Thành Quang, TS. Lê Hồng Sơn, TS. Vũ Thị Hồng Thanh, TS. Thái Doãn Chương, TS. Nguyễn Văn Dũng, TS. Trần Giang Nam, HVCH Nguyễn Trần Thuận,... cùng các nhà khoa học và bạn bè đồng nghiệp. Tác giả xin chân thành cảm ơn về những sự giúp đỡ quý báo đó.

Tác giả xin gửi lời cảm ơn tới PGS. TS. Andrei Volodin (Đại học Regina, Canada) vì sự cộng tác viết bài báo, sự giúp đỡ về tài liệu nghiên cứu và thảo luận những bài toán có liên quan.

Tác giả xin được gửi lời cảm ơn tới:

- Khoa Toán học, Khoa Sau đại học, Trường Đại học Vinh
- Khoa Toán học, Trường Đại học Đồng Tháp
- Khoa Toán - Ứng dụng, Trường Đại học Sài Gòn

về sự hỗ trợ và tạo mọi điều kiện thuận lợi để tác giả hoàn thành nhiệm vụ của một nghiên cứu sinh.

Cuối cùng, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn tới gia đình và những người bạn thân thiết đã luôn giúp đỡ và động viên tác giả trong suốt quá trình học tập.

Nguyễn Văn Huấn

MỤC LỤC

MỘT SỐ KÝ HIỆU THƯỜNG DÙNG TRONG LUẬN ÁN

$\mathbb{N}$	tập hợp các số nguyên dương
$\mathbb{N}_0$	tập hợp các số tự nhiên
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$x := y$	x được định nghĩa bằng y
$\mathbf{n}$	phần tử $\mathbf{n} := (n_1, n_2, ..., n_d) \in \mathbb{N}_0^d$
$\mathbf{1}$	phần tử $\mathbf{1} := (1, 1, ..., 1) \in \mathbb{N}^d$
$\mathbf{n} - \mathbf{1}$	phần tử $\mathbf{n} - \mathbf{1} := (n_1 - 1, n_2 - 1, ..., n_d - 1) \in \mathbb{N}_0^d$
$\mathbf{2}^{\mathbf{n}}$	phần tử $\mathbf{2}^{\mathbf{n}} := (2^{n_1}, 2^{n_2}, ..., 2^{n_d}) \in \mathbb{N}^d$
α	phần tử $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$
$\alpha_{\min}$	giá trị $\alpha_{\min} := \min\{\alpha_i : i = 1, 2, ..., d\}$
$\lvert\mathbf{n}(\alpha)\rvert$	giá trị $\lvert\mathbf{n}(\alpha)\rvert := n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} ... n_d^{\alpha_d}$
$\lvert\mathbf{n}\rvert$	giá trị $\lvert\mathbf{n}\rvert := \lvert\mathbf{n}(\mathbf{1})\rvert = n_1 n_2 ... n_d$
$\mathbf{n} \to \infty$	$n_i \to \infty$ với mọi $i = 1, 2, ..., d$
$\mathbf{m} \preceq \mathbf{n}$	$m_i \leqslant n_i$ với mọi $i = 1, 2, ..., d$
$\mathbf{m} \prec \mathbf{n}$	$m_i < n_i$ với mọi $i = 1, 2, ..., d$
$\Delta^{(\mathbf{m})}$	$\Delta^{(\mathbf{m})} := \{\mathbf{k} : \mathbf{2}^{\mathbf{m}} \preceq \mathbf{k} \prec \mathbf{2}^{\mathbf{m}+\mathbf{1}}\}$
$\triangle b_{\mathbf{n}}$	sai phân của mảng $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ tại $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$
$\mathbf{E}$	không gian Banach thực và khả ly
$\lVert x\rVert$	chuẩn của phần tử $x \in \mathbf{E}$
$\mathcal{B}(\mathbf{E})$	σ-đại số Borel của $\mathbf{E}$
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	không gian xác suất
$\mathbb{E}X$	kỳ vọng của biến ngẫu nhiên X
$I_{(A)}$	hàm chỉ tiêu của tập hợp A
h.c.c.	hầu chắc chắn
tr. i	trang thứ i trong tài liệu được trích dẫn
$\square$	kết thúc chứng minh

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

1.1. Luật số lớn nói riêng, các định lý giới hạn trong lý thuyết xác suất nói chung đã được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu. Luật số lớn có nhiều ứng dụng trong thống kê, kinh tế, y học và một số ngành khoa học thực nghiệm khác. Chính vì vậy, việc nghiên cứu luật số lớn không chỉ có ý nghĩa lý thuyết mà còn có ý nghĩa thực tiễn to lớn.

1.2. A. N. Kolmogorov là người xây dựng lý thuyết xác suất bằng phương pháp tiên đề và đã thiết lập luật số lớn nổi tiếng mang tên ông. Luật số lớn đối với dãy các biến ngẫu nhiên tiếp tục được nhiều nhà toán học như J. Marcinkiewicz, A. Zygmund, H. D. Brunk, Y. V. Prokhorov, K. L. Chung, W. Feller,... quan tâm nghiên cứu. Cho đến nay, nghiên cứu luật số lớn vẫn là một vấn đề có tính thời sự của lý thuyết xác suất.

1.3. Đối với mảng các biến ngẫu nhiên, cấu trúc nhiều chiều của tập các chỉ số làm nảy sinh nhiều vấn đề. Trên tập các chỉ số, quan hệ thứ tự thông thường không có tính chất tuyến tính; ta có thể xây dựng các quan hệ thứ tự khác nhau; các dạng hội tụ có thể được xét khi max hoặc min của các tọa độ tiến tới vô cùng... Các đặc điểm đó góp phần tạo nên tính đa dạng của các kết quả nghiên cứu về luật số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên.

1.4. Các luật số lớn cổ điển chủ yếu tập trung nghiên cứu cho dãy một chỉ số các biến ngẫu nhiên độc lập và nhận giá trị thực. Một hướng phát triển các luật số lớn cổ điển là nghiên cứu về luật số lớn đối với dãy và mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Banach. Các kết quả theo hướng nghiên cứu này thường có mối liên hệ chặt chẽ với lý thuyết hình học Banach và tạo ra sự giao thoa giữa lý thuyết xác suất và giải tích hàm.

Với các lý do nêu trên, chúng tôi chọn đề tài nghiên cứu cho luận án của mình là: **"Các định lý giới hạn dạng luật số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên"**.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích của luận án là thiết lập các định lý giới hạn dạng luật số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Banach cho các trường hợp: có hoặc không có điều kiện về cấu trúc của mảng các biến ngẫu nhiên và có hoặc không có điều kiện hình học của không gian Banach.

3. Đối tượng nghiên cứu

Luật số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên.

4. Phạm vi nghiên cứu

Luận án tập trung nghiên cứu các định lý giới hạn dạng luật số lớn cho mảng các biến ngẫu nhiên bất kỳ nhận giá trị trong không gian Banach thực và khả ly, mảng phù hợp, mảng hiệu martingale và mảng hiệu martingale theo khối nhận giá trị trong không gian Banach p-khả trơn, mảng các biến ngẫu nhiên độc lập, độc lập theo khối và mảng các biến ngẫu nhiên p-trực giao theo khối nhận giá trị trong không gian Banach Rademacher loại p.

5. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu lý thuyết trong khi thực hiện đề tài. Về mặt kỹ thuật, chúng tôi sử dụng ba phương pháp cơ bản trong chứng minh luật số lớn. Đó là phương pháp chặt cụt, phương pháp sử dụng bất đẳng thức cực đại dạng bất đẳng thức Hájek-Rényi và phương pháp dãy con.

6. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn

Các kết quả của luận án góp phần làm phong phú thêm cho hướng nghiên cứu về các định lý giới hạn trong lý thuyết xác suất.

Luận án là tài liệu tham khảo cho sinh viên, học viên cao học và nghiên cứu sinh chuyên ngành Lý thuyết xác suất và Thống kê toán học.

7. Tổng quan và cấu trúc luận án

7.1. Tổng quan về luận án

Luật yếu số lớn đầu tiên được chứng minh bởi một nhà toán học người Thụy Sỹ là J. Bernoulli, kết quả này được công bố vào năm 1713 khi ông đã qua đời. Về sau, luật yếu số lớn của J. Bernoulli được mở rộng bởi S. D. Poisson, J. Bienaymé, P. L. Chebyshev, A. A. Markov và A. Y. Khinchin. Tuy nhiên, phải đến năm 1909 thì luật mạnh số lớn mới được một nhà toán học người Pháp là E. Borel phát hiện và kết quả này đã được A. N. Kolmogorov hoàn thiện (xem [1], [19]). Một trong những kết quả khá sớm về luật mạnh số lớn là định lý của F. P. Cantelli (xem [42]). Định lý này phát biểu rằng: Nếu dãy các biến ngẫu nhiên $\{X_n, n \geqslant 1\}$ độc lập và thỏa mãn điều kiện

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\Big(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i - \mathbb{E}X_i)^4 + \big(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i - \mathbb{E}X_i)^2\big)^2\Big) < \infty$$

thì xảy ra luật mạnh số lớn

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i) \to 0 \ \text{ h.c.c. } \ \text{khi } \ n \to \infty.$$

A. N. Kolmogorov đã thay thế điều kiện được đề cập trong định lý của F. P. Cantelli bởi điều kiện $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n - \mathbb{E}X_n)^2/n^2 < \infty$. Đồng thời, A. N. Kolmogorov chỉ ra rằng nếu $\{X_n, n \geqslant 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối thì điều kiện cần và đủ để có luật mạnh số lớn là các biến ngẫu nhiên đó có moment tuyệt đối bậc một hữu hạn. Sau đó, kết quả này đã được J. Marcinkiewicz và A. Zygmund mở rộng.

Một hướng phát triển các luật số lớn cổ điển là nghiên cứu về luật số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên. Đối với mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực, R. T. Smythe [59] đã chứng minh luật mạnh số lớn Kolmogorov; luật số lớn Marcinkiewicz-Zygmund cũng đã được nghiên cứu bởi A. Gut [15], A. Gut và U. Stadtmüller [18], D. H. Hong và S. Y. Hwang [24], D. H. Hong và A. Volodin [26], E. B. Czerebak-Mrozowicz, O. I. Klesov và Z. Rychlik [7]. Luật yếu số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Banach đã được nhiều tác giả quan tâm. Một số kết quả theo hướng nghiên cứu này thuộc về L. Zhang [67], D. H. Hong, M. Ordóñez Cabrera, S. H. Sung và A. Volodin [25], A. Rosalsky và M. Sreehari [51], A. Rosalsky và A. Volodin [55]. Gần đây, luật mạnh số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Banach đã được nghiên cứu bởi J. Hoffmann-Jørgensen, K. L. Su và R. L. Taylor [23], A. Kuczmaszewska [32], T. Tómács [62], K. L. Su [60], Z. A. Lagodowski [33].

Trong nước, luật số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên cũng đã được một số tác giả như Nguyễn Duy Tiến, Nguyễn Văn Giang, Nguyễn Văn Hùng, Nguyễn Văn Quảng, Lê Văn Thành, Lê Văn Dũng,... nghiên cứu. Một số kết quả liên quan trực tiếp đến luận án có thể tìm thấy trong các bài báo [47], [49], [52], [53], [61].

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu các định lý giới hạn dạng luật số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Banach cho các trường hợp: có hoặc không có điều kiện về cấu trúc của mảng các biến ngẫu nhiên và có hoặc không có điều kiện hình học của không gian Banach.

Trước hết chúng tôi giới thiệu khái niệm mảng hiệu martingale và chứng minh một bất đẳng thức cực đại dạng bất đẳng thức Doob đối với mảng hiệu martingale. Chúng tôi cũng chứng minh một bất đẳng thức cực đại dạng bất đẳng thức Hájek-Rényi đối với mảng các biến ngẫu nhiên. Sử dụng những kết quả này cùng với việc bổ sung các tính chất hình học của không gian Banach, chúng tôi nhận được các đặc trưng của không gian Banach p-khả trơn và không gian Banach Rademacher loại p dưới dạng bất đẳng thức moment đối với mảng các biến ngẫu nhiên.

Đối với luật yếu số lớn, dựa vào các bất đẳng thức moment đối với mảng hiệu martingale, mảng hiệu martingale theo hàng và phương pháp chặt cụt, chúng tôi mở rộng tiêu chuẩn hội tụ suy biến cho trường hợp $|\mathbf{n}| \to \infty$ đối với mảng phù hợp và mảng phù hợp theo hàng, nhận giá trị trong không gian Banach p-khả trơn. Điểm lưu ý trong phần chứng minh là cách xây dựng mảng hiệu martingale và mảng hiệu martingale theo hàng tương ứng từ mảng phù hợp và mảng phù hợp theo hàng. Sử dụng những kết quả này, chúng tôi thu được luật yếu số lớn Kolmogorov-Feller đối với mảng phù hợp và mảng phù hợp theo hàng, nhận giá trị trong không gian Banach p-khả trơn với giả thiết các biến ngẫu nhiên đó bị trội ngẫu nhiên.

Đối với luật mạnh số lớn, chúng tôi tiến hành nghiên cứu cho cả hai trường hợp $\mathbf{n} \to \infty$ và $|\mathbf{n}| \to \infty$. Về luật mạnh số lớn cho trường hợp $\mathbf{n} \to \infty$, chúng tôi đưa ra điều kiện để một mảng các biến ngẫu nhiên bất kỳ, nhận giá trị trong một không gian Banach tùy ý tuân theo luật mạnh số lớn tổng quát. Sử dụng kết quả này, chúng tôi nhận được các đặc trưng của không gian Banach p-khả trơn và không gian Banach Rademacher loại p dưới dạng luật mạnh số lớn tổng quát. Đối với luật mạnh số lớn cho trường hợp $|\mathbf{n}| \to \infty$, sử dụng phương pháp dãy con, chúng tôi thiết lập luật mạnh số lớn Kolmogorov đối với mảng hiệu martingale nhận giá trị trong không gian Banach p-khả trơn. Chúng tôi cũng đưa ra điều kiện để một mảng các biến ngẫu nhiên bất kỳ tuân theo luật mạnh số lớn. Sử dụng kết quả này cùng với việc bổ sung các giả thiết ràng buộc đối với mảng các biến ngẫu nhiên và tính chất hình học của không gian Banach, chúng tôi mở rộng một số luật mạnh số lớn đối với mảng có cấu trúc ràng buộc theo khối. Đó là luật mạnh số lớn Brunk-Prokhorov đối với mảng hiệu martingale theo khối nhận giá trị trong không gian Banach p-khả trơn và mảng các biến ngẫu nhiên độc lập theo khối nhận giá trị trong không gian Banach Rademacher loại p, luật số lớn dạng luật số lớn Rademacher-Menshov đối với mảng các biến ngẫu nhiên p-trực giao theo khối nhận giá trị trong không gian Banach Rademacher loại p.

Các kết quả chính của luận án đã được trình bày tại Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ 7 (Đại học Quy Nhơn, 8/2008), Hội nghị khoa học kỷ niệm "Nửa thế kỷ Trường Đại học Vinh anh hùng" (Đại học Vinh, 10/2009), Hội nghị toàn quốc lần thứ 4 về xác suất và thống kê (Đại học Vinh, 5/2010), Hội thảo khoa học nghiên cứu sinh của Trường Đại học Vinh (Đại học Vinh, 12/2010), Seminar của Bộ môn Xác suất thống kê và Toán ứng dụng thuộc Khoa Toán học, Trường Đại học Vinh (Đại học Vinh, 6/2011). Phần lớn các kết quả này đã được công bố trên các tạp chí *Journal of Probability and Statistical Science*, *Statistics and Probability Letters*, *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics*, *Lobachevskii Journal of Mathematics* và *Journal of Inequalities and Applications*.

7.2. Cấu trúc của luận án

Ngoài các phần Một số ký hiệu thường dùng trong luận án, Mở đầu, Kết luận chung và kiến nghị, Danh mục công trình liên quan trực tiếp đến luận án và Tài liệu tham khảo, phần nội dung chính của luận án được trình bày trong ba chương.

Chương 1 được dành để giới thiệu khái niệm mảng hiệu martingale và chứng minh một số bất đẳng thức moment đối với mảng các biến ngẫu nhiên. Mục 1.1 trình bày phần kiến thức chuẩn bị bao gồm các ký hiệu và khái niệm cơ bản cùng với bốn bổ đề liên quan đến nội dung của cả luận án. Mục 1.2 trình bày khái niệm mảng hiệu martingale. Mục 1.3 được dành để chứng minh một số bất đẳng thức moment đối với mảng các biến ngẫu nhiên cho cả hai trường hợp: có và không có điều kiện hình học của không gian Banach. Các kết quả chính của Chương 1 là Định nghĩa 1.2.3, Định lý 1.3.1, Định lý 1.3.3, Định lý 1.3.4 và Định lý 1.3.6.

Chương 2 trình bày về luật yếu số lớn đối với mảng phù hợp và mảng phù hợp theo hàng cho trường hợp $|\mathbf{n}| \to \infty$. Mục 2.1 được dành để thiết lập tiêu chuẩn hội tụ suy biến và luật yếu số lớn Kolmogorov-Feller đối với mảng phù hợp nhận giá trị trong không gian Banach p-khả trơn. Mục 2.2 tiếp tục nghiên cứu những vấn đề tương tự như trong Mục 2.1 đối với mảng phù hợp theo hàng. Các kết quả chính của Chương 2 là Định lý 2.1.1, Định lý 2.1.9, Định lý 2.2.5 và Định lý 2.2.7.

Chương 3 trình bày về luật mạnh số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên cho hai trường hợp $\mathbf{n} \to \infty$ và $|\mathbf{n}| \to \infty$. Mục 3.1 trình bày phần kiến thức chuẩn bị bao gồm các ký hiệu và khái niệm cùng với bốn bổ đề bổ trợ liên quan đến nội dung của hai mục tiếp theo. Mục 3.2 được dành để nghiên cứu luật mạnh số lớn tổng quát đối với mảng các biến ngẫu nhiên cho trường hợp $\mathbf{n} \to \infty$. Mục 3.3 được dành để mở rộng luật mạnh số lớn Kolmogorov cho mảng hiệu martingale nhận giá trị trong không gian Banach p-khả trơn và chứng minh một số dạng luật mạnh số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên có cấu trúc ràng buộc theo khối cho trường hợp $|\mathbf{n}| \to \infty$. Các kết quả chính của Chương 3 là Định lý 3.2.4, Định lý 3.2.6, Định lý 3.2.8, Định lý 3.3.1, Định lý 3.3.6, Định lý 3.3.12, Định lý 3.3.16 và Định lý 3.3.18.

CHƯƠNG 1

MẢNG HIỆU MARTINGALE VÀ MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC MOMENT

Trong chương này, chúng tôi giới thiệu khái niệm mảng hiệu martingale và thiết lập một số bất đẳng thức moment đối với mảng các biến ngẫu nhiên. Các kết quả chính của chương được viết dựa trên các bài báo [28], [45] và [46].

1.1. Các kiến thức chuẩn bị

Mục này trình bày phần kiến thức chuẩn bị bao gồm các ký hiệu và khái niệm cùng với bốn bổ đề liên quan đến nội dung của cả luận án.

Ta ký hiệu $\mathbb{N}$ là tập các số nguyên dương, $\mathbb{N}_0$ là tập các số tự nhiên, $\mathbb{R}$ là tập các số thực và $\mathbb{R}_+$ là tập các số thực dương. Giả sử $d \in \mathbb{N}$, những phần tử thuộc $\mathbb{N}_0^d$: $(0, 0, ..., 0)$, $(1, 1, ..., 1)$, $(m_1, m_2, ..., m_d)$, $(n_1, n_2, ..., n_d)$, $(n_1 + 1, n_2 + 1, ..., n_d + 1)$, $(n_1 - 1, n_2 - 1, ..., n_d - 1)$, $(2^{n_1}, 2^{n_2}, ..., 2^{n_d})$ lần lượt được ký hiệu bởi $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{n+1}$, $\mathbf{n-1}$, $\mathbf{2^n}$. Giả sử $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$, ta ký hiệu $\alpha_{\min} = \min\{\alpha_i : i = 1, 2, ..., d\}$, $\alpha_{\max} = \max\{\alpha_i : i = 1, 2, ..., d\}$, $|\mathbf{n}(\alpha)| = n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} ... n_d^{\alpha_d}$ và $|\mathbf{n}| = |\mathbf{n}(\mathbf{1})|$.

Với $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$, ta viết $\mathbf{m} \preceq \mathbf{n}$ hoặc $\mathbf{n} \succeq \mathbf{m}$ (tương ứng, $\mathbf{m} \prec \mathbf{n}$) nếu $m_i \leqslant n_i$ (tương ứng, $m_i < n_i$) với mọi $i = 1, 2, ..., d$. Giới hạn $\mathbf{n} \to \infty$ được hiểu là $n_i \to \infty$ với mọi $i = 1, 2, ..., d$. Rõ ràng $\mathbf{n} \to \infty$ tương đương với $\mathbf{n}_{\min} \to \infty$.

Giả sử A là một tập hợp, ta ký hiệu $I_{(A)}$ là hàm chỉ tiêu của tập A, 2^A là tập hợp tất cả các tập con của A và $\text{card}(A)$ là lực lượng của A.

Trong luận án này, các ký hiệu o và O được sử dụng với ý nghĩa thông thường như trong giải tích cổ điển; C là một hằng số dương và giá trị của nó có thể khác nhau giữa các lần xuất hiện. Để khẳng định hằng số C chỉ phụ thuộc vào p, ta dùng cách viết $C = C_{(p)}$. Ta cũng luôn giả thiết rằng $\mathbf{E}$ là không gian Banach thực và khả ly; $\mathcal{B}(\mathbf{E})$ là σ-đại số Borel của $\mathbf{E}$; $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ là không gian xác suất đầy đủ; các biến ngẫu nhiên đều nhận giá trị trong $\mathbf{E}$.

Giả sử X là một biến ngẫu nhiên, $\mathcal{G}$ là một σ-đại số con của $\mathcal{F}$. *Kỳ vọng* của biến ngẫu nhiên X được định nghĩa là tích phân Bochner của X (nếu tồn tại) và được ký hiệu là $\mathbb{E}X$. *Kỳ vọng có điều kiện* của biến ngẫu nhiên X đối với $\mathcal{G}$ (nếu tồn tại) là biến ngẫu nhiên Y sao cho Y là $\mathcal{G}/\mathcal{B}(\mathbf{E})$ đo được và $\mathbb{E}(YI_A) = \mathbb{E}(XI_A)$ với mọi $A \in \mathcal{G}$. Kỳ vọng có điều kiện của biến ngẫu nhiên X đối với $\mathcal{G}$ được ký hiệu là $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.

Biến ngẫu nhiên X được gọi là một *biến ngẫu nhiên khả tích Bochner* nếu $\mathbb{E}\|X\| < \infty$. Chú ý rằng nếu biến ngẫu nhiên X khả tích Bochner thì tồn tại kỳ vọng $\mathbb{E}X$ và kỳ vọng có điều kiện $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ với mọi $\mathcal{G}$ là σ-đại số con của $\mathcal{F}$. Những đề cập chi tiết về kỳ vọng, kỳ vọng có điều kiện và các tính chất của chúng có thể tìm thấy trong hai tài liệu [10] và [56].

Giả sử $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các số thực. *Sai phân* của mảng $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ tại $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ được ký hiệu là $\triangle b_{\mathbf{n}}$ và được định nghĩa

$$\triangle b_{\mathbf{n}} := \sum_{\mathbf{k} \in \Theta(\mathbf{n})} (-1)^{\sum_{i=1}^{d}(n_i - k_i)}\, b_{\mathbf{k}},$$

trong đó $\Theta(\mathbf{n}) = \{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d : \ \mathbf{k} \preceq \mathbf{n} \preceq \mathbf{k} + \mathbf{1}\}$ và quy ước $b_{\mathbf{k}} = 0$ nếu $|\mathbf{k}| = 0$.

Dễ thấy rằng $\operatorname{card}\big(\Theta(\mathbf{n})\big) = 2^d$; nếu $d = 1$ thì $\triangle b_i = b_i - b_{i-1}$ với mọi $i \geqslant 1$; nếu $d = 2$ thì $\triangle b_{ij} = b_{ij} - b_{i,j-1} - b_{i-1,j} + b_{i-1,j-1}$ với mọi $i \geqslant 1$, $j \geqslant 1$. Một tính chất quan trọng của sai phân sẽ được sử dụng trong luận án là $b_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} \triangle b_{\mathbf{k}}$ với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$. Hơn nữa, nếu tồn tại mảng các số thực $\{a_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ sao cho $b_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} a_{\mathbf{k}}$ với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ thì $\triangle b_{\mathbf{n}} = a_{\mathbf{n}}$ với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$.

1.1.1 Định nghĩa. Ta nói rằng mảng $\{x_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} \subset \mathbf{E}$ *hội tụ tới* $x \in \mathbf{E}$ khi $\mathbf{n} \to \infty$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ mà $\mathbf{n}_{\min} \geqslant n_0$, thì $\|x - x_{\mathbf{n}}\| < \varepsilon$.

Khi đó ta ký hiệu $\lim\limits_{\mathbf{n} \to \infty} x_{\mathbf{n}} = x$ hoặc $x_{\mathbf{n}} \to x$ khi $\mathbf{n} \to \infty$.

1.1.2 Chú ý. Liên quan đến sự hội tụ của chuỗi bội, chúng ta thống nhất ký hiệu

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} x_{\mathbf{n}} := \lim_{\mathbf{n} \to \infty} \sum_{\mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} x_{\mathbf{k}}.$$

1.1.3 Định nghĩa. Ta nói rằng mảng $\{x_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} \subset \mathbf{E}$ *hội tụ tới* $x \in \mathbf{E}$ khi $|\mathbf{n}| \to \infty$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ mà $|\mathbf{n}| \geqslant n_0$, thì $\|x - x_{\mathbf{n}}\| < \varepsilon$.

Khi đó ta ký hiệu $\lim\limits_{|\mathbf{n}| \to \infty} x_{\mathbf{n}} = x$ hoặc $x_{\mathbf{n}} \to x$ khi $|\mathbf{n}| \to \infty$.

1.1.4 Nhận xét.

(i) $x_{\mathbf{n}} \to x$ khi $|\mathbf{n}| \to \infty$ khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$, hầu hết $x_{\mathbf{n}}$ đều thỏa mãn $\|x - x_{\mathbf{n}}\| < \varepsilon$. Nói cách khác, chỉ có hữu hạn $x_{\mathbf{n}}$ thỏa mãn $\|x - x_{\mathbf{n}}\| \geqslant \varepsilon$. Điều này cũng đảm bảo rằng mảng $\{x_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ bị chặn ($\sup_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} \|x_{\mathbf{n}}\| < \infty$).

(ii) $x_{\mathbf{n}} \to x$ khi $|\mathbf{n}| \to \infty$ khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ thỏa mãn $\mathbf{n}_{\max} \geqslant n_0$, thì $\|x - x_{\mathbf{n}}\| < \varepsilon$. Do đó $x_{\mathbf{n}} \to x$ khi $|\mathbf{n}| \to \infty$ kéo theo $x_{\mathbf{n}} \to x$ khi $\mathbf{n} \to \infty$. Nói chung, hai dạng hội tụ này không trùng nhau khi $d > 1$.

1.1.5 Định nghĩa. Mảng các số thực $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ được gọi là một *mảng không giảm* (tương ứng, *mảng không tăng*) nếu nó không giảm (tương ứng, không tăng) theo quan hệ thứ tự $\preceq$, nghĩa là $b_{\mathbf{m}} \leqslant b_{\mathbf{n}}$ (tương ứng, $b_{\mathbf{m}} \geqslant b_{\mathbf{n}}$) với mọi $\mathbf{m} \preceq \mathbf{n}$ ($\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$).

1.1.6 Định nghĩa. ([32], [55]) Mảng các biến ngẫu nhiên $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ được gọi là một *mảng bị trội ngẫu nhiên* bởi biến ngẫu nhiên X nếu tồn tại một hằng số $C > 0$ sao cho với mọi $t \geqslant 0$ và mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ thì

$$\mathbb{P}(\|X_{\mathbf{n}}\| > t) \leqslant C\, \mathbb{P}(\|X\| > t).$$

Rõ ràng, nếu $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên cùng phân phối thì nó là một mảng bị trội ngẫu nhiên bởi $X_{\mathbf{1}}$.

1.1.7 Định nghĩa. ([64], tr. 277) Không gian Banach $\mathbf{E}$ được gọi là một *không gian p-trơn đều* ($1 \leqslant p \leqslant 2$) nếu môđun trơn $\rho(\tau)$ thỏa mãn $\rho(\tau) = O(\tau^p)$ (khi $\tau \to 0$), trong đó *môđun trơn* được định nghĩa

$$\rho(\tau) := \sup\left\{\frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2} - 1 \colon x, y \in \mathbf{E}, \|x\| = 1, \|y\| = \tau\right\}.$$

1.1.8 Nhận xét.

(i) Từ bất đẳng thức tam giác ta có môđun trơn $\rho(\tau) \leqslant \tau$ với mọi $\tau > 0$. Do đó, với $1 \leqslant p \leqslant 2$, điều kiện $\rho(\tau) = O(\tau^p)$ tương đương với điều kiện tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho $\rho(\tau) \leqslant C\tau^p$ với mọi $\tau > 0$. Hơn nữa, những lập luận này đủ để khẳng định rằng mọi không gian Banach là không gian 1-trơn đều.

(ii) J. Lindenstrauss trong [35, Hệ quả] (xem thêm [63, Hệ quả 2.1]) chỉ ra rằng $\rho(\tau) \geqslant \sqrt{\tau^2 + 1} - 1$ với mọi $\tau > 0$. Do đó, không thể tồn tại $p > 2$ để $\rho(\tau) = O(\tau^p)$. Vì vậy, Định nghĩa 1.1.7 không có ý nghĩa khi $p > 2$.

(iii) Đối với không gian $\mathcal{L}^p$ các hàm có lũy thừa bậc p khả tích ($1 \leqslant p < \infty$), J. Lindenstrauss trong [35, tr. 243] (xem thêm [9, Bổ đề B1]) đã chỉ ra

$$\rho(\tau) = \begin{cases} \tau^p/p + O(\tau^{2p}) & \text{nếu} \quad 1 \leqslant p \leqslant 2, \\ (p-1)\tau^2/2 + O(\tau^4) & \text{nếu} \quad 2 < p < \infty. \end{cases}$$

Vì vậy, không gian $\mathcal{L}^p$ ($1 \leqslant p < \infty$) là không gian $\min\{2; p\}$-trơn đều. Hơn nữa, điều này cũng đảm bảo rằng không gian ℓ_p các dãy có lũy thừa bậc p khả tổng ($1 \leqslant p < \infty$) là không gian $\min\{2; p\}$-trơn đều.

(iv) Theo W. A. Woyczyński [63, Mệnh đề 2.2], không gian Banach $\mathbf{E}$ là một không gian p-trơn đều ($1 \leqslant p \leqslant 2$) khi và chỉ khi tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho với mọi $x, y \in \mathbf{E}$ thì

$$\|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leqslant 2\|x\|^p + C\|y\|^p.$$

Do đó, từ đẳng thức bình hành ta khẳng định được mọi không gian Hilbert là không gian 2-trơn đều. Đặc biệt, đường thẳng thực $\mathbb{R}$ là một không gian 2-trơn đều. Trong trường hợp này, $\rho(\tau) = \sqrt{\tau^2+1} - 1$ với mọi $\tau > 0$ (xem [63, Hệ quả 2.1]). Hơn nữa, nếu $\mathbf{E}$ là một không gian Banach p-trơn đều ($1 < p \leqslant 2$) thì nó là một không gian r-trơn đều với $1 \leqslant r < p$. Chi tiết hơn, ta có đánh giá sau

$$\begin{aligned}\big(\|x+y\|^r + \|x+y\|^r\big)^{p/r} &\leqslant 2^{p/r-1}\big(2\|x\|^p + C\|y\|^p\big)\\ &\leqslant \big(2\|x\|^r + C\|y\|^r\big)^{p/r}.\end{aligned}$$

1.1.9 Định nghĩa. ([64], tr. 277) Không gian Banach $\mathbf{E}$ được gọi là một *không gian p-khả trơn* ($1 \leqslant p \leqslant 2$) nếu tồn tại một chuẩn tương đương với chuẩn ban đầu sao cho $\mathbf{E}$ cùng với chuẩn này trở thành một không gian p-trơn đều.

1.1.10 Bổ đề. ([22], Định lý 2.2) *Giả sử p là một số thực* ($1 \leqslant p \leqslant 2$)*. Khi đó các phát biểu sau là tương đương:*

(i) *$\mathbf{E}$ là một không gian Banach p-khả trơn.*

(ii) *Tồn tại hằng số dương $C = C_{(p)}$ sao cho với mọi hiệu martingale $\{X_j, \mathcal{F}_j, j \geqslant 1\}$ nhận giá trị trong $\mathbf{E}$ thì*

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^{i} X_j\Big\|^p \leqslant C\sum_{j=1}^{i}\mathbb{E}\|X_j\|^p, \quad i \geqslant 1. \tag{1.1.1}$$

(iii) *Với mọi hiệu martingale $\{X_j, \mathcal{F}_j, j \geqslant 1\}$ nhận giá trị trong $\mathbf{E}$, điều kiện*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mathbb{E}\|X_j\|^p}{j^p} < \infty \tag{1.1.2}$$

kéo theo

$$\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} X_j \to 0 \ \ h.c.c. \ \ khi \ \ i \to \infty. \tag{1.1.3}$$

1.1.11 Bổ đề. ([66], tr. 217) *Giả sử p là một số thực* $(1 \leqslant p \leqslant 2)$. *Khi đó hai phát biểu sau là tương đương:*

(i) **E** *là một không gian Banach p-khả trơn.*

(ii) *Với mọi số thực* $q \geqslant 1$, *tồn tại hằng số dương* $C = C_{(p,\,q)}$ *sao cho với mọi hiệu martingale* $\{X_j, \mathcal{F}_j, j \geqslant 1\}$ *nhận giá trị trong* **E** *thì*

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^{i} X_j\Big\|^q \leqslant C\,\mathbb{E}\Big(\sum_{j=1}^{i}\|X_j\|^p\Big)^{q/p}, \quad i \geqslant 1. \tag{1.1.4}$$

1.1.12 Định nghĩa. ([34], tr. 246) Giả sử $\{r_j, j \geqslant 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối và

$$\mathbb{P}(r_1 = 1) = \mathbb{P}(r_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$

Không gian Banach **E** được gọi là một *không gian Rademacher loại p* $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ nếu tồn tại một hằng số $C > 0$ sao cho với mọi $i \geqslant 1$ và mọi $v_j \in \mathbf{E}$ $(1 \leqslant j \leqslant i)$ thì

$$\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^{i} r_j v_j\Big\|^p\Big)^{1/p} \leqslant C\Big(\sum_{j=1}^{i}\|v_j\|^p\Big)^{1/p}. \tag{1.1.5}$$

1.1.13 Nhận xét.

(i) Theo M. Ledoux và M. Talagrand trong [34, tr. 246], bất đẳng thức (1.1.5) có thể được thay thế bởi

$$\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^{i} r_j v_j\Big\|^q\Big)^{1/q} \leqslant C\Big(\sum_{j=1}^{i}\|v_j\|^p\Big)^{1/p} \tag{1.1.6}$$

với q là một số thực dương bất kỳ.

Như vậy, không gian Banach $\mathbf{E}$ là một không gian Rademacher loại p $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ nếu tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho với mọi $i \geqslant 1$ và mọi $v_j \in \mathbf{E}$ $(1 \leqslant j \leqslant i)$ thì

$$\mathbb{E}\Big\| \sum_{j=1}^{i} r_j v_j \Big\| \leqslant C\Big(\sum_{j=1}^{i} \|v_j\|^p \Big)^{1/p}.$$

Đây là cách định nghĩa về không gian Banach Rademacher loại p của W. A. Woyczyński trong [65, Định nghĩa 1.1]. Hơn nữa, trong trường hợp này, chúng ta có thể khẳng định được rằng nếu $\mathbf{E}$ là một không gian Banach Rademacher loại p $(1 < p \leqslant 2)$ thì nó là một không gian Rademacher loại r với $1 \leqslant r < p$. Chi tiết hơn, ta có đánh giá sau

$$\Big(\sum_{j=1}^{i} \|v_j\|^p \Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{j=1}^{i} \|v_j\|^r \Big)^{1/r}.$$

(ii) Trong trường hợp $q = 2$, bất đẳng thức (1.1.6) trở thành

$$\Big(\mathbb{E}\Big\| \sum_{j=1}^{i} r_j v_j \Big\|^2\Big)^{1/2} \leqslant C\Big(\sum_{j=1}^{i} \|v_j\|^p \Big)^{1/p}.$$

Bằng việc chọn $v_j = v \neq 0 \in \mathbf{E}$ $(1 \leqslant j \leqslant i)$ ta có

$$i^{1/2}\|v\| \leqslant C\, i^{1/p}\|v\|.$$

Bất đẳng thức trên không được đảm bảo nếu $p > 2$. Điều này chỉ ra rằng Định nghĩa 1.1.12 không có ý nghĩa khi $p > 2$.

Ngoài ra, A. Rosalsky và A. Volodin trong [55] đã chỉ ra rằng điều kiện để không gian Banach $\mathbf{E}$ là không gian Rademacher loại p $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ tương đương với điều kiện tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho

$$\mathbb{E}\Big\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j v_j \Big\|^p \leqslant C \sum_{j=1}^{\infty} \|v_j\|^p$$

với mọi $(v_1, v_2, ...) \in \mathcal{C}(\mathbf{E})$, trong đó

$$\mathcal{C}(\mathbf{E}) = \Big\{(v_1, v_2, ...) \in \mathbf{E} \times \mathbf{E} \times \mathbf{E} \times ... : \sum_{j=1}^{\infty} r_j v_j \ \text{ hội tụ theo xác suất}\Big\}.$$

1.1.14 Bổ đề. ([22], Định lý 2.1) *Giả sử p là một số thực* $(1 \leqslant p \leqslant 2)$. *Khi đó các phát biểu sau là tương đương:*

(i) $\mathbf{E}$ *là một không gian Banach Rademacher loại p.*

(ii) *Tồn tại hằng số dương $C = C_{(p)}$ sao cho* (1.1.1) *đúng với mọi dãy* $\{X_j, j \geqslant 1\}$ *các biến ngẫu nhiên độc lập, có kỳ vọng bằng* 0 *và nhận giá trị trong* $\mathbf{E}$.

(iii) *Với mọi dãy $\{X_j, j \geqslant 1\}$ các biến ngẫu nhiên độc lập, có kỳ vọng bằng* 0 *và nhận giá trị trong* $\mathbf{E}$, *điều kiện* (1.1.2) *kéo theo* (1.1.3).

1.1.15 Nhận xét. Từ hai bổ đề 1.1.10 và 1.1.14 ta khẳng định được rằng nếu $\mathbf{E}$ là một không gian Banach p-khả trơn $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ thì nó là một không gian Rademacher loại p. Tuy nhiên, điều ngược lại không còn đúng nữa (xem [40, Định lý 6.1 và Định lý 6.3] cho trường hợp $p = 2$, [8, Định lý 3] và [66, tr. 216] cho trường hợp $1 < p < 2$).

1.1.16 Bổ đề. ([65], Mệnh đề 2.1) *Giả sử p là một số thực* $(1 \leqslant p \leqslant 2)$. *Khi đó hai phát biểu sau là tương đương:*

(i) $\mathbf{E}$ *là một không gian Banach Rademacher loại p.*

(ii) *Với mọi số thực $q \geqslant 1$, tồn tại hằng số dương $C = C_{(p,\,q)}$ sao cho với mọi dãy $\{X_j, j \geqslant 1\}$ các biến ngẫu nhiên độc lập, có kỳ vọng bằng* 0 *và nhận giá trị trong* $\mathbf{E}$ *thì* (1.1.4) *đúng.*

1.2. Mảng hiệu martingale

Khái niệm mảng hiệu martingale được giới thiệu trong mục này là một dạng nhiều chiều của khái niệm hiệu martingale. Để đưa ra khái niệm này, ta cần trình bày định nghĩa về cơ sở ngẫu nhiên và mảng phù hợp sử dụng quan hệ thứ tự $\preceq$ trên $\mathbb{N}_0^d$. Chú ý rằng hai định nghĩa được đề cập sau đây chỉ là sự mở rộng tự nhiên từ trường hợp một chiều.

1.2.1 Định nghĩa. Mảng các σ-đại số con $\{\mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d\}$ của $\mathcal{F}$ được gọi là một *cơ sở ngẫu nhiên* nếu nó không giảm theo quan hệ thứ tự $\preceq$ trên $\mathbb{N}_0^d$, nghĩa là $\mathcal{F}_{\mathbf{m}} \subset \mathcal{F}_{\mathbf{n}}$ với mọi $\mathbf{m} \preceq \mathbf{n}$.

1.2.2 Định nghĩa. Giả sử $\{\mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d\}$ là một cơ sở ngẫu nhiên và $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Banach $\mathbf{E}$ thỏa mãn $X_{\mathbf{n}}$ là $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}/\mathcal{B}(\mathbf{E})$ đo được với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$. Khi đó $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ được gọi là một *mảng phù hợp*.

Giả sử $\{\mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d\}$ là một cơ sở ngẫu nhiên (quy ước $\mathcal{F}_{\mathbf{n}} = \{\emptyset, \Omega\}$ nếu $|\mathbf{n}| = 0$). Với mỗi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$, đặt

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^1 &= \bigvee_{k_i \geqslant 1\ (2 \leqslant i \leqslant d)} \mathcal{F}_{n_1 k_2 k_3 \ldots k_d} := \sigma\Big(\bigcup_{k_2=1}^{\infty} \bigcup_{k_3=1}^{\infty} \cdots \bigcup_{k_d=1}^{\infty} \mathcal{F}_{n_1 k_2 k_3 \ldots k_d}\Big), \\
\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^j &= \bigvee_{k_i \geqslant 1\ (1 \leqslant i \leqslant j-1)} \quad \bigvee_{k_i \geqslant 1\ (j+1 \leqslant i \leqslant d)} \mathcal{F}_{k_1 \ldots k_{j-1} n_j k_{j+1} \ldots k_d} \quad \text{nếu} \quad 1 < j < d, \\
\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^d &= \bigvee_{k_i \geqslant 1\ (1 \leqslant i \leqslant d-1)} \mathcal{F}_{k_1 k_2 \ldots k_{d-1} n_d}, \\
\mathcal{G}_{\mathbf{n}} &= \bigvee_{1 \leqslant i \leqslant d} \mathcal{F}_{\mathbf{n}}^i,
\end{aligned}$$

trong trường hợp $d = 1$, đặt $\mathcal{F}_n^1 = \mathcal{F}_n$.

1.2.3 Định nghĩa. Mảng phù hợp $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ được gọi là một *mảng hiệu martingale* nếu $\mathbb{E}(X_{\mathbf{n}} | \mathcal{F}_{\mathbf{n}-\mathbf{1}}^i) = 0$ h.c.c. với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ và mọi $i = 1, 2, ..., d$.

Như vậy, khái niệm mảng hiệu martingale chính là một dạng nhiều chiều của khái niệm hiệu martingale. Sau đây, chúng ta sẽ đề cập đến hai ví dụ để minh họa cho mối quan hệ giữa mảng hiệu martingale và mảng các biến ngẫu nhiên độc lập, có kỳ vọng bằng 0.

1.2.4 Ví dụ. Giả sử $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên độc lập và có kỳ vọng bằng 0. Với mỗi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, đặt

$$\mathcal{F}_{\mathbf{n}} = \sigma\{X_{\mathbf{k}}, \mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}\}.$$

Khi đó $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng phù hợp. Hơn nữa, với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ và mọi $i = 1, 2, ..., d$, $\mathbb{E}(X_{\mathbf{n}}|\mathcal{F}^i_{\mathbf{n}-\mathbf{1}}) = \mathbb{E}X_{\mathbf{n}} = 0$. Vì vậy $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng hiệu martingale.

1.2.5 Ví dụ. Giả sử d là một số nguyên dương và $\{X_j, \mathcal{F}_j, j \geqslant 1\}$ là một hiệu martingale thỏa mãn $\{X_j, j \geqslant 1\}$ không phải là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập. Với mỗi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, đặt

$$X_{\mathbf{n}} = \begin{cases} X_{n_1} & \text{nếu } n_2 = n_3 = ... = n_d = 1, \\ 0 & \text{nếu tồn tại } i : 2 \leqslant i \leqslant d \text{ sao cho } n_i > 1, \end{cases}$$

và với mỗi $\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d$, đặt

$$\mathcal{F}_{\mathbf{k}} = \begin{cases} \mathcal{F}_{k_1} & \text{nếu } |\mathbf{k}| \neq 0, \\ \{\emptyset, \Omega\} & \text{nếu } |\mathbf{k}| = 0. \end{cases}$$

Khi đó $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ không phải là một mảng các biến ngẫu nhiên độc lập. Tuy nhiên $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng phù hợp. Hơn nữa, với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$,

$$\mathcal{F}^i_{\mathbf{n}} = \begin{cases} \mathcal{F}_{n_1} & \text{nếu } i = 1, \\ \sigma\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}_j\big) & \text{nếu } i \neq 1, \end{cases}$$

và $\mathcal{F}^i_{\mathbf{k}} = \{\emptyset, \Omega\}$ nếu $k_i = 0$. Do đó $\mathbb{E}(X_{\mathbf{n}}|\mathcal{F}^i_{\mathbf{n}-\mathbf{1}}) = 0$ với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ và mọi $i = 1, 2, ..., d$. Vì vậy $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng hiệu martingale.

Như vậy, tập tất cả các mảng hiệu martingale thực sự rộng hơn tập tất cả các mảng các biến ngẫu nhiên độc lập và có kỳ vọng bằng 0.

1.3. Một số bất đẳng thức moment

Trong mục này, chúng tôi thiết lập một số bất đẳng thức moment đối với mảng các biến ngẫu nhiên cho cả hai trường hợp: có và không có điều kiện hình học của không gian Banach.

Định lý sau đây thiết lập một bất đẳng thức cực đại dạng bất đẳng thức Doob đối với mảng hiệu martingale nhận giá trị trong một không gian Banach thực và khả ly.

1.3.1 Định lý. *Nếu q là một số thực ($q > 1$), g là một hàm lồi, không giảm và nhận giá trị không âm, $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng hiệu martingale nhận giá trị trong một không gian Banach thực và khả ly thì*

$$\mathbb{E}\Big(\max_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} g\Big(\Big\|\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}} X_{\mathbf{l}}\Big\|\Big)\Big)^q \leqslant \Big(\frac{q}{q-1}\Big)^{qd}\mathbb{E}\Big(g\Big(\Big\|\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}\Big\|\Big)\Big)^q, \ \mathbf{n}\in\mathbb{N}^d. \tag{1.3.1}$$

Chứng minh. Vì g là một hàm lồi và nhận giá trị không âm nên từ bất đẳng thức Doob đối với martingale dưới không âm (xem [5, tr. 255]) ta thu được (1.3.1) cho trường hợp $d = 1$. Giả sử rằng (1.3.1) đúng khi $d = D - 1 \geqslant 1$. Ta sẽ chứng minh nó cũng đúng khi $d = D$.

Thật vậy, với mỗi $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^D$ ($\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}$), đặt

$$S_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}} X_{\mathbf{l}}, \quad Y_{k_D} = \max_{1\leqslant k_i\leqslant n_i\ (1\leqslant i\leqslant D-1)} g(\|S_{\mathbf{k}}\|).$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(S_{k_1k_2\ldots k_{D-1}k_D}|\mathcal{F}^D_{k_1k_2\ldots k_{D-1},k_D-1})\\
&= \mathbb{E}(S_{k_1k_2\ldots k_{D-1},k_D-1}|\mathcal{F}^D_{k_1k_2\ldots k_{D-1},k_D-1})\\
&\quad + \mathbb{E}\Big(\sum_{1\leqslant l_i\leqslant k_i\ (1\leqslant i\leqslant D-1)} X_{l_1l_2\ldots l_{D-1}k_D}|\mathcal{F}^D_{k_1k_2\ldots k_{D-1},k_D-1}\Big)\\
&= S_{k_1k_2\ldots k_{D-1},k_D-1}.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_{k_D}|\mathcal{F}^D_{k_1k_2\ldots k_{D-1},k_D-1}) &= \mathbb{E}\Big(\max_{1\leqslant k_i\leqslant n_i\ (1\leqslant i\leqslant D-1)} g(\|S_{\mathbf{k}}\|)\ |\mathcal{F}^D_{k_1k_2\ldots k_{D-1},k_D-1}\Big)\\
&\geqslant \max_{1\leqslant k_i\leqslant n_i\ (1\leqslant i\leqslant D-1)} \mathbb{E}\big(g(\|S_{\mathbf{k}}\|)\ |\mathcal{F}^D_{k_1k_2\ldots k_{D-1},k_D-1}\big)\\
&\geqslant \max_{1\leqslant k_i\leqslant n_i\ (1\leqslant i\leqslant D-1)} g\big(\|\mathbb{E}(S_{\mathbf{k}}|\mathcal{F}^D_{k_1k_2\ldots k_{D-1},k_D-1})\|\big)\\
&= \max_{1\leqslant k_i\leqslant n_i\ (1\leqslant i\leqslant D-1)} g(\|S_{k_1k_2\ldots k_{D-1},k_D-1}\|) = Y_{k_{D-1}}.
\end{aligned}$$

Hay $\{Y_{k_D}, \mathcal{F}^D_{k_1k_2\ldots k_{D-1}k_D}, 1 \leqslant k_D \leqslant n_D\}$ là một martingale dưới không âm. Theo bất đẳng thức Doob thì

$$\mathbb{E}\Big(\max_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} g(\|S_{\mathbf{k}}\|)\Big)^q = \mathbb{E}\Big(\max_{1\leqslant k_D\leqslant n_D} Y_{k_D}\Big)^q \leqslant \Big(\frac{q}{q-1}\Big)^q \mathbb{E}Y^q_{n_D}. \quad (1.3.2)$$

Đặt

$$X'_{k_1k_2\ldots k_{D-1}} = \sum_{k_D=1}^{n_D} X_{k_1k_2\ldots k_{D-1}k_D}, \quad \mathcal{F}'_{k_1k_2\ldots k_{D-1}} = \bigvee_{k_D=1}^{\infty} \mathcal{F}_{k_1k_2\ldots k_{D-1}k_D}.$$

Khi đó $\{X'_{k_1k_2\ldots k_{D-1}}, \mathcal{F}'_{k_1k_2\ldots k_{D-1}}, (k_1, k_2, \ldots, k_{D-1}) \in \mathbb{N}^{D-1}\}$ cũng là một mảng hiệu martingale. Vì vậy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Y^q_{n_D} =& \mathbb{E}\Big(\max_{1\leqslant k_i\leqslant n_i\ (1\leqslant i\leqslant D-1)} g(\|S_{k_1k_2\ldots k_{D-1}n_D}\|)\Big)^q\\
=& \mathbb{E}\Big(\max_{1\leqslant k_i\leqslant n_i\ (1\leqslant i\leqslant D-1)} g\Big(\Big\|\sum_{1\leqslant l_i\leqslant k_i\ (1\leqslant i\leqslant D-1)} X'_{l_1l_2\ldots l_{D-1}}\Big\|\Big)\Big)^q\\
\leqslant& \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^{p(D-1)} \mathbb{E}\Big(g\Big(\Big\|\sum_{1\leqslant l_i\leqslant n_i\ (1\leqslant i\leqslant D-1)} X'_{l_1l_2\ldots l_{D-1}}\Big\|\Big)\Big)^q\\
=& \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^{p(D-1)} \mathbb{E}\big(g(\|S_{\mathbf{n}}\|)\big)^q. \qquad (1.3.3)
\end{aligned}$$

Kết hợp (1.3.2), (1.3.3) ta nhận được (1.3.1) cho trường hợp $d = D$. □

Hệ quả sau đây được suy ra trực tiếp từ Định lý 1.3.1 và là dạng nhiều chiều của bất đẳng thức Doob đối với hiệu martingale (xem [20, Định lý 2.2]).

1.3.2 Hệ quả. *Nếu q là một số thực ($q > 1$), $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng hiệu martingale nhận giá trị trong một không gian Banach thực và khả ly thì*

$$\mathbb{E}\Big(\max_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \Big\|\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}} X_{\mathbf{l}}\Big\|\Big)^q \leqslant \Big(\frac{q}{q-1}\Big)^{qd} \mathbb{E}\Big\|\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}\Big\|^q, \ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d. \quad (1.3.4)$$

Bất đẳng thức Hájek-Rényi đã được chứng minh bởi J. Hájek và A. Rényi trong [21] cho dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, có kỳ vọng bằng 0. Kết quả này tổng quát bất đẳng thức Kolmogorov (xem [31], [17, tr. 122]) và là một công cụ hữu ích để chứng minh luật mạnh số lớn (xem [11, tr. 436]).

Định lý sau đây thiết lập một bất đẳng thức cực đại dạng bất đẳng thức Hájek-Rényi đối với mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong một không gian Banach thực và khả ly. Phương pháp chứng minh định lý này dựa trên ý tưởng của G. R. Shorack và R. T. Smythe trong [58].

1.3.3 Định lý. *Giả sử p là một số thực dương, $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các số thực dương và có sai phân không âm (nghĩa là $b_{\mathbf{n}} > 0$ và $\triangle b_{\mathbf{n}} \geqslant 0$ với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$), $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong một không gian Banach thực và khả ly. Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$ và mọi $\mathbf{m} \preceq \mathbf{n}$ $(\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d)$,*

$$\mathbb{P}\Big(\max_{\mathbf{m}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \frac{1}{b_{\mathbf{k}}}\Big\| \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}} X_{\mathbf{l}}\Big\| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{2^{p(d+1)}}{\varepsilon^p}\, \mathbb{E}\Big(\max_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \Big\| \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}} \frac{X_{\mathbf{l}}}{b_{\mathbf{l}} + b_{\mathbf{m}}}\Big\|\Big)^p.$$

Chứng minh. Vì $\triangle b_{\mathbf{n}} \geqslant 0$ với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ nên $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng không giảm. Do đó, với mọi $\varepsilon > 0$ và mọi $\mathbf{m} \preceq \mathbf{n}$ $(\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d)$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\max_{\mathbf{m}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \frac{1}{b_{\mathbf{k}}}\Big\| \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}} X_{\mathbf{l}}\Big\| \geqslant \varepsilon\Big)\\
&\leqslant \mathbb{P}\Big(\max_{\mathbf{m}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \frac{1}{b_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{m}}}\Big\| \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}} X_{\mathbf{l}}\Big\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\Big)\\
&\leqslant \mathbb{P}\Big(\max_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \frac{1}{b_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{m}}}\Big\| \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}} X_{\mathbf{l}}\Big\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\Big).
\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

Với mỗi $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$, đặt

$$r_{\mathbf{k}} = b_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{m}},\ D_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}} \frac{X_{\mathbf{l}}}{r_{\mathbf{l}}}.$$

Sử dụng phép hoán vị thứ tự lấy tổng ta có

$$\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}} X_{\mathbf{l}} = \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}} \Big(\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{t}\preceq\mathbf{l}} \triangle r_{\mathbf{t}} \Big) \frac{X_{\mathbf{l}}}{r_{\mathbf{l}}} = \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{t}\preceq\mathbf{k}} \triangle r_{\mathbf{t}} \Big(\sum_{\mathbf{t}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}} \frac{X_{\mathbf{l}}}{r_{\mathbf{l}}} \Big).$$

Hơn nữa, vì $\triangle r_{\mathbf{t}} \geqslant 0$ nên

$$\max_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \frac{1}{r_{\mathbf{k}}} \Big\| \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}} X_{\mathbf{l}} \Big\| \leqslant 2^d \max_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{n}} \|D_{\mathbf{l}}\|. \tag{1.3.6}$$

Từ (1.3.5), (1.3.6) và bất đẳng thức Markov ta nhận được

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\max_{\mathbf{m}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \frac{1}{b_{\mathbf{k}}} \Big\| \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}} X_{\mathbf{l}} \Big\| \geqslant \varepsilon \Big) &\leqslant \mathbb{P}\Big(\max_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{n}} \|D_{\mathbf{l}}\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2^{d+1}} \Big) \\ &\leqslant \frac{2^{p(d+1)}}{\varepsilon^p} \mathbb{E}\big(\max_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{n}} \|D_{\mathbf{l}}\| \big)^p.\end{aligned}$$

Điều này kéo theo kết luận của định lý. □

Các kết quả tiếp theo là những trường hợp riêng của Định lý 1.3.1 và Định lý 1.3.3 khi ta bổ sung các giả thiết về cấu trúc của mảng các biến ngẫu nhiên và tính chất hình học của không gian Banach.

Định lý sau đây đưa ra ba đặc trưng của không gian Banach p-khả trơn dưới dạng ba bất đẳng thức moment đối với mảng hiệu martingale.

1.3.4 Định lý. *Giả sử p là một số thực ($1 \leqslant p \leqslant 2$) và d là một số nguyên dương. Khi đó các phát biểu sau là tương đương:*

(i) *$\mathbf{E}$ là một không gian Banach p-khả trơn.*

(ii) *Tồn tại hằng số dương $C = C_{(p)}$ sao cho với mọi mảng hiệu martingale $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ nhận giá trị trong $\mathbf{E}$ thì*

$$\mathbb{E}\Big\| \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}} \Big\|^p \leqslant C^d \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \mathbb{E}\|X_{\mathbf{k}}\|^p, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d. \tag{1.3.7}$$

(iii) *Với mọi số thực $q \geqslant 1$, tồn tại hằng số dương $C = C_{(p,q)}$ sao cho với mọi mảng hiệu martingale $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ nhận giá trị trong $\mathbf{E}$ thì*

$$\mathbb{E}\Big(\max_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \Big\| \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}} X_{\mathbf{l}} \Big\| \Big)^q \leqslant C^d |\mathbf{n}|^{\max\{q/p;\,1\}-1} \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \mathbb{E}\|X_{\mathbf{k}}\|^q, \ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d. \tag{1.3.8}$$

(iv) *Tồn tại hằng số dương $C = C_{(p,d)}$ sao cho với mọi mảng hiệu martingale $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ nhận giá trị trong* $\mathbf{E}$, *với mọi mảng $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ các số thực dương và có sai phân không âm, mọi $\varepsilon > 0$ và mọi $\mathbf{m} \preceq \mathbf{n}$ $(\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d)$ thì*

$$\mathbb{P}\Big(\max_{\mathbf{m}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \frac{1}{b_{\mathbf{k}}}\Big\|\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}} X_{\mathbf{l}}\Big\| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{C}{\varepsilon^p} \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \mathbb{E}\Big\|\frac{X_{\mathbf{k}}}{b_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{m}}}\Big\|^p. \tag{1.3.9}$$

Chứng minh. (i) $\Rightarrow$ (iii): Vì $\mathbf{E}$ là một không gian p-khả trơn $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ nên $\mathbf{E}$ cũng là một không gian r-khả trơn với $1 \leqslant r \leqslant p$. Do vậy, không mất tính tổng quát, ta giả sử $q \geqslant p$. Hơn nữa, vì bất đẳng thức (1.3.8) đúng khi $p = q = 1$ nên ta giả thiết thêm rằng $q > 1$.

Mặt khác, nhờ Hệ quả 1.3.2, ta chỉ cần chứng minh

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}\Big\|^q \leqslant C^d|\mathbf{n}|^{q/p-1} \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \mathbb{E}\|X_{\mathbf{k}}\|^q. \tag{1.3.10}$$

Nhận thấy trong trường hợp $d = 1$, bất đẳng thức (1.3.10) được suy ra từ Bổ đề 1.1.11 và bất đẳng thức Hölder. Giả sử rằng (1.3.10) đúng khi $d = D - 1 \geqslant 1$. Ta sẽ chỉ ra nó cũng đúng khi $d = D$.

Đặt $S_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}} X_{\mathbf{l}}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^D$. Khi đó, với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^D$, mọi $k_D \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(S_{n_1n_2\cdots n_{D-1},k_D+1}|\mathcal{F}^D_{n_1n_2\cdots n_{D-1}k_D})\\
&= \mathbb{E}(S_{n_1n_2\cdots n_{D-1}k_D}|\mathcal{F}^D_{n_1n_2\cdots n_{D-1}k_D})\\
&\quad + \mathbb{E}\Big(\sum_{1\leqslant k_i\leqslant n_i (1\leqslant i\leqslant D-1)} X_{k_1k_2\cdots k_{D-1},k_D+1}|\mathcal{F}^D_{n_1n_2\cdots n_{D-1}k_D}\Big)\\
&= S_{n_1n_2\cdots n_{D-1}k_D}.
\end{aligned}$$

Do đó $\{S_{n_1n_2\cdots n_{D-1}k_D}, \mathcal{F}^D_{n_1n_2\cdots n_{D-1}k_D}, 1 \leqslant k_D \leqslant n_D\}$ là một martingale. Theo Bổ đề 1.1.11 và bất đẳng thức Hölder thì

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\|S_{\mathbf{n}}\|^q &\leqslant C\mathbb{E}\Big(\sum_{k_D=1}^{n_D}\Big\|\sum_{1\leqslant k_i\leqslant n_i\ (1\leqslant i\leqslant D-1)} X_{k_1k_2\ldots k_{D-1}k_D}\Big\|^p\Big)^{q/p}\\
&\leqslant C(n_D)^{q/p-1}\sum_{k_D=1}^{n_D}\mathbb{E}\Big\|\sum_{1\leqslant k_i\leqslant n_i\ (1\leqslant i\leqslant D-1)} X_{k_1k_2\ldots k_{D-1}k_D}\Big\|^q.
\end{aligned} \tag{1.3.11}$$

Với mỗi k_D cố định, đặt

$$X'_{k_1k_2...k_{D-1}} = X_{k_1k_2...k_{D-1}k_D},\ \mathcal{F}'_{k_1k_2...k_{D-1}} = \bigvee_{l_D=1}^{\infty} \mathcal{F}_{k_1k_2...k_{D-1}l_D}. \quad (1.3.12)$$

Khi đó $\{X'_{k_1k_2...k_{D-1}}, \mathcal{F}'_{k_1k_2...k_{D-1}}, (k_1, k_2, ..., k_{D-1}) \in \mathbb{N}^{D-1}\}$ cũng là một mảng hiệu martingale. Vì vậy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big\| & \sum_{1\leqslant k_i\leqslant n_i\ (1\leqslant i\leqslant D-1)} X'_{k_1k_2...k_{D-1}}\Big\|^q \\ & \leqslant C^{D-1}(n_1n_2...n_{D-1})^{q/p-1} \sum_{1\leqslant k_i\leqslant n_i\ (1\leqslant i\leqslant D-1)} \mathbb{E}\|X'_{k_1k_2...k_{D-1}}\|^q. \quad (1.3.13)\end{aligned}$$

Kết hợp (1.3.11), (1.3.12) và (1.3.13) ta nhận được (1.3.10) cho trường hợp $d = D$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Kéo theo này là hiển nhiên.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Giả sử rằng (ii) đúng với một số nguyên dương d nào đó. Ta cần chứng minh $\mathbf{E}$ là một không gian p-khả trơn.

Thật vậy, giả sử $\{X_j, \mathcal{F}_j, j \geqslant 1\}$ là một hiệu martingale nhận giá trị trong $\mathbf{E}$. Sử dụng cách xây dựng mảng hiệu martingale xuất phát từ hiệu martingale $\{X_j, \mathcal{F}_j, j \geqslant 1\}$ như trong Ví dụ 1.2.5, ta nhận được mảng hiệu martingale $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$. Hơn nữa, với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$,

$$\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \mathbb{E}\|X_{\mathbf{k}}\|^p = \sum_{j=1}^{n_1} \mathbb{E}\|X_j\|^p, \quad (1.3.14)$$

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}\Big\|^p = \mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^{n_1} X_j\Big\|^p. \quad (1.3.15)$$

Từ (1.3.7), (1.3.14) và (1.3.15) ta có

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^{n_1} X_j\Big\|^p \leqslant C\sum_{j=1}^{n_1} \mathbb{E}\|X_j\|^p.$$

Do vậy, Bổ đề 1.1.10 đảm bảo rằng $\mathbf{E}$ là một không gian p-khả trơn.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Giả sử $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng hiệu martingale. Khi đó, với mỗi $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$, $\{X_{\mathbf{n}}/(b_{\mathbf{n}} + b_{\mathbf{m}}), \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ cũng là một mảng hiệu martingale. Vì vậy, từ Định lý 1.3.3 ta thu được ((iii) $\Rightarrow$ (iv)).

(iv) $\Rightarrow$ (i): Giả sử rằng (iv) đúng với một số nguyên dương d nào đó. Ta cần chứng minh $\mathbf{E}$ là một không gian p-khả trơn.

Thật vậy, giả sử $\{X_j, \mathcal{F}_j, j \geqslant 1\}$ là một hiệu martingale nhận giá trị trong $\mathbf{E}$ và thỏa mãn điều kiện (1.1.2). Với mỗi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, đặt $b_{\mathbf{n}} = n_1$. Khi đó

$$\triangle b_{\mathbf{n}} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \; n_2 = n_3 = ... = n_d = 1, \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Điều đó có nghĩa rằng $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các số thực dương và có sai phân không âm.

Mặt khác, sử dụng cách xây dựng mảng hiệu martingale xuất phát từ hiệu martingale $\{X_j, \mathcal{F}_j, j \geqslant 1\}$ như trong Ví dụ 1.2.5, ta thu được mảng hiệu martingale $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$. Hơn nữa, với mọi $\varepsilon > 0$ và mọi $\mathbf{m} \preceq \mathbf{n}$ $(\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d)$, tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho

$$\mathbb{P}\Big(\max_{\mathbf{m} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} \frac{1}{b_{\mathbf{k}}} \Big\| \sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{l} \preceq \mathbf{k}} X_{\mathbf{l}} \Big\| \geqslant \varepsilon \Big) \leqslant \frac{C}{\varepsilon^p} \sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} \mathbb{E} \Big\| \frac{X_{\mathbf{k}}}{b_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{m}}} \Big\|^p.$$

Điều này kéo theo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\Big(\max_{m_1 \leqslant k_1 \leqslant n_1} \frac{1}{k_1} \Big\| \sum_{i=1}^{k_1} X_i \Big\| \geqslant \varepsilon \Big) &\leqslant \frac{C}{\varepsilon^p} \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\mathbb{E}\|X_i\|^p}{(i + m_1)^p} \\ &\leqslant \frac{C}{\varepsilon^p} \Big(\sum_{i=1}^{m_1} \frac{\mathbb{E}\|X_i\|^p}{m_1^p} + \sum_{i=m_1+1}^{n_1} \frac{\mathbb{E}\|X_i\|^p}{i^p} \Big), \end{aligned}$$

cho $n_1 \to \infty$ ta nhận được

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{k_1 \geqslant m_1} \frac{1}{k_1} \Big\| \sum_{i=1}^{k_1} X_i \Big\| \geqslant \varepsilon \Big) \leqslant \frac{C}{\varepsilon^p} \Big(\sum_{i=1}^{m_1} \frac{\mathbb{E}\|X_i\|^p}{m_1^p} + \sum_{i=m_1+1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\|X_i\|^p}{i^p} \Big).$$

Điều này cùng với (1.1.2) và bổ đề Kronecker đảm bảo rằng

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{k_1\geqslant m_1}\frac{1}{k_1}\Big\|\sum_{i=1}^{k_1}X_i\Big\|\geqslant\varepsilon\Big)\to 0\ \text{ khi }\ m_1\to\infty.$$

Do đó (1.1.3) đúng. Theo Bổ đề 1.1.10, **E** là một không gian p-khả trơn.□

Trong trường hợp $d = 1$, Định lý 1.3.4 kéo theo kết quả chính của S. Gan trong [13]. Cụ thể, ta có hệ quả sau:

1.3.5 Hệ quả. ([13], Định lý) *Giả sử p là một số thực* $(1 \leqslant p \leqslant 2)$. *Khi đó hai phát biểu sau là tương đương:*

(i) **E** *là một không gian Banach p-khả trơn.*

(ii) *Tồn tại hằng số dương* $C = C_{(p)}$ *sao cho với mọi hiệu martingale* $\{X_j, \mathcal{F}_j, j \geqslant 1\}$ *nhận giá trị trong* **E**, *mọi dãy không giảm các số thực dương* $\{b_j, j \geqslant 1\}$, *mọi* $\varepsilon > 0$ *và mọi số nguyên dương* n, n_0 $(n_0 \leqslant n)$ *thì*

$$\mathbb{P}\Big(\max_{n_0\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{b_i}\Big\|\sum_{j=1}^{i}X_j\Big\|\geqslant\varepsilon\Big)\leqslant\frac{C}{\varepsilon^p}\Big(\sum_{j=1}^{n_0}\frac{\mathbb{E}\|X_j\|^p}{b_{n_0}^p}+\sum_{j=n_0+1}^{n}\frac{\mathbb{E}\|X_j\|^p}{b_j^p}\Big). \quad (1.3.16)$$

Nhận thấy bất đẳng thức (1.3.4) đúng với mọi mảng các biến ngẫu nhiên độc lập và có kỳ vọng bằng 0. Do vậy, bằng việc sử dụng hai bổ đề 1.1.14 và 1.1.16 cùng với phương pháp chứng minh tương tự như đối với Định lý 1.3.4, ta thu được định lý sau đây. Chú ý rằng đặc điểm nhiều chiều trong phát biểu (ii) của Định lý 1.3.4 không còn ý nghĩa khi ta xét cho trường hợp mảng các biến ngẫu nhiên độc lập và có kỳ vọng bằng 0.

1.3.6 Định lý. *Giả sử p là một số thực* $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ *và d là một số nguyên dương. Khi đó các phát biểu sau là tương đương:*

(i) **E** *là một không gian Banach Rademacher loại p.*

(ii) *Với mọi số thực* $q \geqslant 1$, *tồn tại hằng số dương* $C = C_{(p,q)}$ *sao cho với mọi mảng* $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *các biến ngẫu nhiên độc lập, có kỳ vọng bằng 0 và nhận giá trị trong* **E** *thì* (1.3.8) *đúng.*

(iii) *Tồn tại hằng số dương* $C = C_{(p,d)}$ *sao cho với mọi mảng* $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *các biến ngẫu nhiên độc lập, có kỳ vọng bằng* 0 *và nhận giá trị trong* $\mathbf{E}$*, mọi mảng* $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *các số thực dương và có sai phân không âm, mọi* $\varepsilon > 0$ *và mọi* $\mathbf{m} \preceq \mathbf{n}$ $(\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d)$ *thì* (1.3.9) *đúng.*

Hệ quả sau đây đưa ra một đặc trưng của không gian Rademacher loại p dưới dạng bất đẳng thức Hájek-Rényi đối với mảng các biến ngẫu nhiên độc lập và có kỳ vọng bằng 0. Trong trường hợp $\mathbf{E} = \mathbb{R}$, từ hệ quả này ta nhận được kết quả chính của J. Hájek và A. Rényi trong [21].

1.3.7 Hệ quả. *Giả sử* p *là một số thực* $(1 \leqslant p \leqslant 2)$*. Khi đó hai phát biểu sau là tương đương:*

(i) $\mathbf{E}$ *là một không gian Banach Rademacher loại* p.

(ii) *Tồn tại hằng số dương* $C = C_{(p)}$ *sao cho với mọi dãy* $\{X_j, j \geqslant 1\}$ *các biến ngẫu nhiên độc lập, có kỳ vọng bằng* 0 *và nhận giá trị trong* $\mathbf{E}$*, mọi dãy không giảm các số thực dương* $\{b_j, j \geqslant 1\}$*, mọi* $\varepsilon > 0$ *và mọi số nguyên dương* n, n_0 $(n_0 \leqslant n)$ *thì* (1.3.16) *đúng.*

1.4. Kết luận của Chương 1

Trong chương này, luận án đã giải quyết được những vấn đề sau:

- Giới thiệu khái niệm mảng hiệu martingale - dạng nhiều chiều của khái niệm hiệu martingale;

- Thiết lập bất đẳng thức cực đại dạng bất đẳng thức Doob đối với mảng hiệu martingale và bất đẳng thức cực đại dạng bất đẳng thức Hájek-Rényi đối với mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong một không gian Banach thực và khả ly bất kỳ;

- Đưa ra một số đặc trưng của không gian Banach p-khả trơn và không gian Banach Rademacher loại p dưới dạng các bất đẳng thức moment.

CHƯƠNG 2

LUẬT YẾU SỐ LỚN ĐỐI VỚI MẢNG PHÙ HỢP VÀ MẢNG PHÙ HỢP THEO HÀNG

Trong chương này, chúng tôi thiết lập tiêu chuẩn hội tụ suy biến và luật yếu số lớn Kolmogorov-Feller đối với mảng phù hợp và mảng phù hợp theo hàng, nhận giá trị trong không gian Banach p-khả trơn. Các kết quả chính của chương được viết dựa trên hai bài báo [43] và [45].

2.1. Luật yếu số lớn đối với mảng phù hợp

Tiêu chuẩn hội tụ suy biến cổ điển (xem M. Loève [36, tr. 290]) cung cấp điều kiện cần và đủ để một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập tuân theo luật yếu số lớn. Sau đó, tiêu chuẩn hội tụ suy biến đã được nghiên cứu đối với martingale (xem P. Hall và C. C. Heyde [20, tr. 29]). Kết quả này cung cấp điều kiện đủ để xảy ra luật yếu số lớn đối với martingale. P. Hall và C. C. Heyde cũng đã đưa ra một ví dụ để khẳng định rằng kết quả này không thể phát biểu dưới dạng điều kiện cần và đủ như trong trường hợp độc lập (xem P. Hall và C. C. Heyde [20, tr. 29-30]).

Gần đây, Nguyễn Văn Quảng và Lê Hồng Sơn trong [48] đã chỉ ra rằng tiêu chuẩn hội tụ suy biến vẫn đúng khi giả thiết dãy các biến ngẫu nhiên lập thành martingale được thay thế bởi một giả thiết yếu hơn: giả thiết dãy đó lập thành dãy phù hợp.

Trong mục này, chúng tôi sử dụng phương pháp chặt cụt (xem [17, tr. 121]) để mở rộng tiêu chuẩn hội tụ suy biến đối với mảng phù hợp. Dựa vào kết quả này, chúng tôi thu được luật yếu số lớn Kolmogorov-Feller cho mảng phù hợp các biến ngẫu nhiên bị trội ngẫu nhiên.

2.1.1 Định lý. *Giả sử* $\{a_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *và* $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *là hai mảng các số thực dương,* $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *là một mảng phù hợp nhận giá trị trong không gian Banach p-khả trơn* $\mathbf{E}$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ *thỏa mãn điều kiện* $\mathbb{E}(X_{\mathbf{n}} I_A | \mathcal{G}_{\mathbf{n-1}})$ *là* $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}/\mathcal{B}(\mathbf{E})$ *đo được với mọi* $A \in \sigma(X_{\mathbf{n}})$ *và mọi* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$*. Đặt* $Y_{\mathbf{nk}} = X_{\mathbf{k}}\, I_{(\|X_{\mathbf{k}}\| \leqslant a_{\mathbf{n}})}$*. Khi đó*

$$\frac{1}{b_{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} \big(X_{\mathbf{k}} - \mathbb{E}(Y_{\mathbf{nk}} | \mathcal{G}_{\mathbf{k-1}})\big) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad khi \quad |\mathbf{n}| \to \infty \tag{2.1.1}$$

nếu hai điều kiện sau đây được thỏa mãn:

$$\sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} \mathbb{P}(\|X_{\mathbf{k}}\| > a_{\mathbf{n}}) \to 0 \quad khi \quad |\mathbf{n}| \to \infty, \tag{2.1.2}$$

$$\frac{1}{b_{\mathbf{n}}^p} \sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} \mathbb{E}\|Y_{\mathbf{nk}} - \mathbb{E}(Y_{\mathbf{nk}} | \mathcal{G}_{\mathbf{k-1}})\|^p \to 0 \quad khi \quad |\mathbf{n}| \to \infty. \tag{2.1.3}$$

Chứng minh. Với mọi $\varepsilon > 0$, ta có

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\frac{1}{b_{\mathbf{n}}}\Big\| \sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} \big(X_{\mathbf{k}} - \mathbb{E}(Y_{\mathbf{nk}} | \mathcal{G}_{\mathbf{k-1}})\big)\Big\| > \varepsilon\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\frac{1}{b_{\mathbf{n}}}\Big\| \sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} \big(X_{\mathbf{k}} - Y_{\mathbf{nk}} + Y_{\mathbf{nk}} - \mathbb{E}(Y_{\mathbf{nk}} | \mathcal{G}_{\mathbf{k-1}})\big)\Big\| > \varepsilon\Big) \\
&\leqslant \mathbb{P}\Big(\frac{1}{b_{\mathbf{n}}}\Big\| \sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} \big(X_{\mathbf{k}} - Y_{\mathbf{nk}}\big)\Big\| > \varepsilon/2\Big) \\
&+ \mathbb{P}\Big(\frac{1}{b_{\mathbf{n}}}\Big\| \sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} \big(Y_{\mathbf{nk}} - \mathbb{E}(Y_{\mathbf{nk}} | \mathcal{G}_{\mathbf{k-1}})\big)\Big\| > \varepsilon/2\Big).
\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Từ (2.1.2) ta thu được

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\frac{1}{b_{\mathbf{n}}}\Big\| \sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} \big(X_{\mathbf{k}} - Y_{\mathbf{nk}}\big)\Big\| > \varepsilon/2\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\frac{1}{b_{\mathbf{n}}}\Big\| \sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}\, I_{(\|X_{\mathbf{k}}\| > a_{\mathbf{n}})}\Big\| > \varepsilon/2\Big) \leqslant \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} (\|X_{\mathbf{k}}\| > a_{\mathbf{n}})\Big) \\
&\leqslant \sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} \mathbb{P}(\|X_{\mathbf{k}}\| > a_{\mathbf{n}}) \to 0 \quad \text{khi} \quad |\mathbf{n}| \to \infty.
\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Mặt khác, vì $Y_{\mathbf{nk}} - \mathbb{E}\big(Y_{\mathbf{nk}}|\mathcal{G}_{\mathbf{k-1}}\big)$ là $\mathcal{F}_{\mathbf{k}}/\mathcal{B}(\mathbf{E})$ đo được với mọi $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$ nên $\{Y_{\mathbf{nk}} - \mathbb{E}\big(Y_{\mathbf{nk}}|\mathcal{G}_{\mathbf{k-1}}\big), \mathcal{F}_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng phù hợp. Hơn nữa, với mọi $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$ và mọi $i = 1, 2, ..., d$,

$$\mathbb{E}\big(Y_{\mathbf{nk}} - \mathbb{E}(Y_{\mathbf{nk}}|\mathcal{G}_{\mathbf{k-1}})|\mathcal{F}^i_{\mathbf{k-1}}\big) = 0.$$

Vì vậy $\{Y_{\mathbf{nk}} - \mathbb{E}(Y_{\mathbf{nk}}|\mathcal{G}_{\mathbf{k-1}}), \mathcal{F}_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng hiệu martingale. Sử dụng bất đẳng thức Markov, Định lý 1.3.4 và điều kiện (2.1.3) ta có

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\frac{1}{b_{\mathbf{n}}}\Big\| \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \big(Y_{\mathbf{nk}} - \mathbb{E}(Y_{\mathbf{nk}}|\mathcal{G}_{\mathbf{k-1}})\big)\Big\| > \varepsilon/2\Big)\\
&\leqslant \frac{2^p}{\varepsilon^p b^p_{\mathbf{n}}}\,\mathbb{E}\Big\| \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \big(Y_{\mathbf{nk}} - \mathbb{E}(Y_{\mathbf{nk}}|\mathcal{G}_{\mathbf{k-1}})\big)\Big\|^p\\
&\leqslant \frac{2^p C}{\varepsilon^p b^p_{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \mathbb{E}\big\|Y_{\mathbf{nk}} - \mathbb{E}(Y_{\mathbf{nk}}|\mathcal{G}_{\mathbf{k-1}})\big\|^p \to 0 \quad \text{khi} \quad |\mathbf{n}| \to \infty. \qquad (2.1.6)
\end{aligned}$$

Kết hợp (2.1.4), (2.1.5) và (2.1.6) ta nhận được (2.1.1). $\square$

Hệ quả sau đây được suy ra trực tiếp từ Định lý 2.1.1 và nó đưa ra tiêu chuẩn hội tụ suy biến đối với mảng phù hợp.

2.1.2 Hệ quả. *Giả sử $\{a_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ và $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là hai mảng các số thực dương, $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng phù hợp nhận giá trị trong không gian Banach p-khả trơn $\mathbf{E}$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ thỏa mãn điều kiện $\mathbb{E}(X_{\mathbf{n}} I_A|\mathcal{G}_{\mathbf{n-1}})$ là $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}/\mathcal{B}(\mathbf{E})$ đo được với mọi $A \in \sigma(X_{\mathbf{n}})$ và mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$. Đặt $Y_{\mathbf{nk}} = X_{\mathbf{k}}\, I_{(\|X_{\mathbf{k}}\| \leqslant a_{\mathbf{n}})}$. Khi đó*

$$\frac{1}{b_{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \textit{khi} \quad |\mathbf{n}| \to \infty \qquad (2.1.7)$$

nếu

$$\frac{1}{b_{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \mathbb{E}(Y_{\mathbf{nk}}|\mathcal{G}_{\mathbf{k-1}}) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \textit{khi} \quad |\mathbf{n}| \to \infty \qquad (2.1.8)$$

và hai điều kiện (2.1.2), (2.1.3) được thỏa mãn.

Chú ý rằng trong trường hợp $d = 1$, điều kiện $\mathbb{E}(X_{\mathbf{n}} I_A | \mathcal{G}_{\mathbf{n-1}})$ là $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}/\mathcal{B}(\mathbf{E})$ đo được với mọi $A \in \sigma(X_{\mathbf{n}})$ và mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ được suy ra từ giả thiết $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng phù hợp. Tuy nhiên, nếu $d > 1$ thì điều này không còn đúng nữa. Ví dụ sau đây được dựa trên Ví dụ 3.1 trong [3] và sẽ chứng minh khẳng định này.

2.1.3 Ví dụ. Giả sử $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ là một không gian xác suất rời rạc với

$$\Omega = \{\varpi_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} \subset \mathbb{R},\ \mathcal{F} = 2^{\Omega},$$
$$\mathbb{P}(\varpi_{\mathbf{n}}) = p_{\mathbf{n}} > 0 \quad (\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d).$$

Với mỗi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, đặt

$$X_{\mathbf{n}} = I_{(\varpi_{\mathbf{n}})},\ \mathcal{F}_{\mathbf{n}} = \sigma\{X_{\mathbf{k}} : \mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}\},$$
$$A_{\mathbf{n}} = \{\varpi_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d \text{ sao cho tồn tại } i : 1 \leqslant i \leqslant d \text{ để } k_i < n_i\}.$$

Khi đó $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng phù hợp nhận giá trị thực. Hơn nữa, với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$,

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{\mathbf{n-1}} &= \sigma\{X_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d \text{ sao cho tồn tại } i : 1 \leqslant i \leqslant d \text{ để } k_i < n_i\}\\ &= \{C, D, C \cup D : C \subset A_{\mathbf{n}}, \overline{D} = \Omega \backslash D \subset A_{\mathbf{n}}\}.\end{aligned}$$

Với mỗi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, đặt $Y_{\mathbf{n}} = a I_{(\overline{A}_{\mathbf{n}})}$ trong đó $a = p_{\mathbf{n}}/\mathbb{P}(\overline{A}_{\mathbf{n}})$. Ta sẽ chứng minh $Y_{\mathbf{n}} = \mathbb{E}(X_{\mathbf{n}} | \mathcal{G}_{\mathbf{n-1}})$ với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$. Do $Y_{\mathbf{n}}$ là $\mathcal{G}_{\mathbf{n-1}}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ đo được với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ nên vấn đề còn lại là cần chỉ ra $\mathbb{E}(Y_{\mathbf{n}} I_{(B)}) = \mathbb{E}(X_{\mathbf{n}} I_{(B)})$ với mọi $B \in \mathcal{G}_{\mathbf{n-1}}$.

Trong trường hợp $B \subset A_{\mathbf{n}}$, ta được $I_{(\overline{A}_{\mathbf{n}})} I_{(B)} = 0$ và $X_{\mathbf{n}} I_{(B)} = 0$, do đó $\mathbb{E}(Y_{\mathbf{n}} I_{(B)}) = \mathbb{E}(X_{\mathbf{n}} I_{(B)}) = 0$.

Trong trường hợp $\overline{B} \subset A_{\mathbf{n}}$, ta được $I_{(\overline{A}_{\mathbf{n}})} I_{(B)} = I_{(\overline{A}_{\mathbf{n}})}$ và $X_{\mathbf{n}} I_{(B)} = X_{\mathbf{n}}$, do đó $\mathbb{E}(Y_{\mathbf{n}} I_{(B)}) = \mathbb{E}(X_{\mathbf{n}} I_{(B)}) = p_{\mathbf{n}}$.

Xét trường hợp còn lại khi $B = C \cup D$ trong đó $C, \overline{D} \subset A_{\mathbf{n}}$, ta có $I_{(B)} = I_{(C)} + I_{(D)} - I_{(C \cap D)}$. Do $C \cap D \subset A_{\mathbf{n}}$ nên bằng những lập luận tương tự như hai trường hợp trên ta chỉ ra được $\mathbb{E}(Y_{\mathbf{n}} I_{(B)}) = \mathbb{E}(X_{\mathbf{n}} I_{(B)})$.

Như vậy $Y_{\mathbf{n}} = \mathbb{E}(X_{\mathbf{n}}|\mathcal{G}_{\mathbf{n-1}})$ với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$. Tuy nhiên, trong trường hợp $d > 1$ thì $Y_{\mathbf{n}}$ không là $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ đo được, do đó cũng không thể đảm bảo $\mathbb{E}(X_{\mathbf{n}}I_A|\mathcal{G}_{\mathbf{n-1}})$ là $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ đo được với mọi $A \in \sigma(X_{\mathbf{n}})$ (chẳng hạn với $A = \Omega$).

2.1.4 Nhận xét. Trong trường hợp $d = 1$ và $a_n = b_n$, Hệ quả 2.1.2 kéo theo Định lý 2.1 của Nguyễn Văn Quảng và Lê Hồng Sơn [48]. Trong bài báo đó, các tác giả đã đưa ra một ví dụ (xem [48, tr. 554]) để chỉ ra Định lý 2.1 trong [48] thực sự mạnh hơn Định lý 2.13 trong [20]. Như vậy, Hệ quả 2.1.2 không chỉ tổng quát mà còn mạnh hơn Định lý 2.13 trong [20].

Hệ quả 2.1.2 đã chỉ rằng các điều kiện (2.1.2), (2.1.3) và (2.1.8) kéo theo kết luận (2.1.7). Tuy nhiên, điều ngược lại là không đúng. Ví dụ sau đây sẽ chỉ ra rằng với mọi số nguyên dương d, (2.1.7) không kéo theo (2.1.2). Ví dụ này được lấy ý tưởng từ một ví dụ trong [20, tr. 29-30].

2.1.5 Ví dụ. Giả sử $\{Y_j, j \geqslant 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, nhận giá trị thực thỏa mãn $Y_1 = 1$ và với mỗi $j > 1$, biến ngẫu nhiên Y_j có phân phối xác suất

$$\mathbb{P}(Y_j = 0) = j^{-1}, \quad \mathbb{P}(Y_j = 2) = 1 - j^{-1}.$$

Giả sử d là một số nguyên dương bất kỳ. Với mỗi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, đặt

$$a_{\mathbf{n}} = n_1,\ b_{\mathbf{n}} = 2^{|\mathbf{n}|},$$
$$X_{\mathbf{n}} = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n_1+1} Y_i - \prod_{i=1}^{n_1} Y_i & \text{nếu} \quad n_2 = n_3 = ... = n_d = 1, \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Khi đó $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}} = \mathcal{F}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng phù hợp, nhận giá trị trong không gian Banach 2-khả trơn $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\mathbb{E}(X_{\mathbf{n}}I_A|\mathcal{G}_{\mathbf{n-1}})$ là $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$

đo được với mọi $A \in \sigma(X_{\mathbf{n}})$ và mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$. Hơn nữa, với mọi $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{1}{b_{\mathbf{n}}}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}\Big| > \varepsilon\Big) &= \mathbb{P}\Big(\Big|\prod_{i=1}^{n_1+1} Y_i - 1\Big| > b_{\mathbf{n}}\varepsilon\Big) \\
&\leqslant \frac{1}{b_{\mathbf{n}}\varepsilon}\Big(\mathbb{E}\prod_{i=1}^{n_1+1} Y_i + 1\Big) \\
&= \frac{1}{2^{|\mathbf{n}|}\varepsilon}\Big(\prod_{i=2}^{n_1+1}\big(2(1-i^{-1})\big) + 1\Big) \\
&= \frac{1}{2^{|\mathbf{n}|}\varepsilon}\Big(2^{n_1}\prod_{i=2}^{n_1+1}(1-i^{-1}) + 1\Big) \\
&= \frac{1}{2^{|\mathbf{n}|}\varepsilon}\Big(\frac{2^{n_1}}{n_1+1} + 1\Big) \to 0 \quad \text{khi} \quad |\mathbf{n}| \to \infty,
\end{aligned}$$

hay (2.1.7) đúng. Tuy nhiên

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \mathbb{P}(|X_{\mathbf{k}}| > a_{\mathbf{n}}) &= \sum_{j=1}^{n_1}\mathbb{P}\Big(\Big|\prod_{i=1}^{j+1} Y_i - \prod_{i=1}^{j} Y_i\Big| > n_1\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{n_1}\mathbb{P}\Big(|Y_{j+1}-1|\prod_{i=1}^{j} Y_i > n_1\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{n_1}\mathbb{P}\Big(\prod_{i=1}^{j} Y_i > n_1\Big) \\
&\geqslant \sum_{\log_2 n_1 \leqslant j \leqslant n_1}\mathbb{P}\Big(\prod_{i=1}^{j} Y_i > n_1\Big) \\
&= \sum_{\log_2 n_1 \leqslant j \leqslant n_1}\prod_{i=2}^{j}(1-i^{-1}) \\
&= \sum_{\log_2 n_1 \leqslant j \leqslant n_1} j^{-1} \geqslant \sum_{\log_2 n_1 \leqslant j \leqslant n_1}\int_j^{j+1} x^{-1}dx \\
&\nrightarrow 0 \;\; \text{khi } n_1 \to \infty.
\end{aligned}$$

Do đó (2.1.2) không được thỏa mãn.

Trong trường hợp $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên độc lập, từ Hệ quả 2.1.2 ta nhận được hệ quả sau đây. Hệ quả này mở rộng tiêu chuẩn hội tụ suy biến cổ điển.

2.1.6 Hệ quả. *Giả sử* $\{a_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *và* $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *là hai mảng các số thực dương,* $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *là một mảng các biến ngẫu nhiên độc lập, nhận giá trị trong một không gian Banach p-khả trơn* $(1 \leqslant p \leqslant 2)$*. Đặt* $Y_{\mathbf{nk}} = X_{\mathbf{k}} I_{(\|X_{\mathbf{k}}\| \leqslant a_{\mathbf{n}})}$*. Khi đó* (2.1.7) *đúng nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn:*

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} \mathbb{P}\big(\|X_{\mathbf{k}}\| > a_{\mathbf{n}}\big) \to 0 \quad \textit{khi} \quad |\mathbf{n}| \to \infty, \\
&\frac{1}{b_{\mathbf{n}}^p} \sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} \mathbb{E}\|Y_{\mathbf{nk}} - \mathbb{E}Y_{\mathbf{nk}}\|^p \to 0 \quad \textit{khi} \quad |\mathbf{n}| \to \infty, \\
&\frac{1}{b_{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} \mathbb{E}Y_{\mathbf{nk}} \to 0 \quad \textit{khi} \quad |\mathbf{n}| \to \infty.
\end{aligned}$$

Ví dụ sau đây sẽ chỉ ra rằng với mọi số nguyên dương d, Hệ quả 2.1.2 thực sự mạnh hơn Hệ quả 2.1.6. Cụ thể hơn, ví dụ này sẽ đề cập đến một trường hợp mà luật yếu số lớn (2.1.7) được suy ra từ Hệ quả 2.1.2 và không thể suy ra từ Hệ quả 2.1.6.

2.1.7 Ví dụ. Giả sử d là một số nguyên dương bất kỳ, $a_{\mathbf{n}} = |\mathbf{n}|^2$, $b_{\mathbf{n}} = |\mathbf{n}|^4$ $(\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d)$, $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên cùng phân phối, nhận giá trị thực và có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{nếu } x > 1, \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Ta giả sử thêm rằng $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ không là một mảng các biến ngẫu nhiên độc lập. Khi đó kết luận (2.1.7) không thể suy ra từ Hệ quả 2.1.6.

Tuy nhiên, $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}} = \mathcal{F}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng phù hợp thỏa mãn

$$\sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} \mathbb{P}(|X_{\mathbf{k}}| > a_{\mathbf{n}}) = |\mathbf{n}| \int_{|\mathbf{n}|^2}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{|\mathbf{n}|} \to 0 \quad \text{khi} \quad |\mathbf{n}| \to \infty,$$

$$\frac{1}{b_{\mathbf{n}}^2} \sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} \mathbb{E}|Y_{\mathbf{nk}} - \mathbb{E}(Y_{\mathbf{nk}} | \mathcal{G}_{\mathbf{k-1}})|^2 \to 0 \quad \text{khi} \quad |\mathbf{n}| \to \infty,$$

$$\frac{1}{b_{\mathbf{n}}} \Big| \sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} \mathbb{E}(Y_{\mathbf{nk}} | \mathcal{G}_{\mathbf{k-1}}) \Big| \leqslant \frac{1}{|\mathbf{n}|^4} \sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} |\mathbf{n}|^2 = \frac{1}{|\mathbf{n}|} \to 0$$

khi $|\mathbf{n}| \to \infty$. Do đó các điều kiện (2.1.2), (2.1.3) và (2.1.8) được thỏa mãn. Từ Hệ quả 2.1.2 ta nhận được (2.1.7).

Luật yếu số lớn Kolmogorov-Feller (xem [17, tr. 279]) đã được tiếp tục nghiên cứu bởi A. Gut trong [16] cho dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối, nhận giá trị thực, và bởi A. Rosalsky và Lê Văn Thành trong [52] cho mảng các biến ngẫu nhiên độc lập, nhận giá trị trong không gian Banach Rademacher loại p. Trong phần tiếp theo, luật yếu số lớn Kolmogorov-Feller sẽ được thiết lập cho mảng phù hợp, trong đó giả thiết cùng phân phối được thay thế bởi một giả thiết yếu hơn, đó là giả thiết bị trội ngẫu nhiên. Nhưng trước hết, chúng ta cần bổ đề sau đây:

2.1.8 Bổ đề. *Nếu p là một số thực $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ và k là một số nguyên dương thì*

(i) $k^{p/r} \leqslant \dfrac{p}{r} \displaystyle\sum_{i=1}^{k} i^{p/r-1}, \quad r \in (0, p),$

(ii) $\displaystyle\sum_{i=i_0}^{k} i^{p/r-2} \leqslant \frac{r\big(k^{p/r-1} - (i_0 - 1)^{p/r-1}\big)}{p-r}, \ i_0 \in \mathbb{N}, \ r \in (p/2, p).$

Chứng minh. (i) Vì $r \in (0, p)$ nên hàm $y = x^{p/r-1}$ đồng biến trên tập $(0, \infty)$. Do đó, với mọi $i = 1, 2, ..., k$, ta có

$$i^{p/r-1} = \int_{i-1}^{i} i^{p/r-1} dx \geqslant \int_{i-1}^{i} x^{p/r-1} dx.$$

Điều này kéo theo

$$\sum_{i=1}^{k} i^{p/r-1} \geqslant \sum_{i=1}^{k} \int_{i-1}^{i} x^{p/r-1}dx = \int_{0}^{k} x^{p/r-1}dx = \frac{r}{p}\, k^{p/r}.$$

(ii) Trong trường hợp này, $y = x^{p/r-2}$ là hàm nghịch biến trên tập $(0, \infty)$. Khi đó, với mọi $i = 1, 2, ..., k$,

$$i^{p/r-2} = \int_{i-1}^{i} i^{p/r-2}dx \leqslant \int_{i-1}^{i} x^{p/r-2}dx.$$

Do vậy

$$\sum_{i=i_0}^{k} i^{p/r-2} \leqslant \sum_{i=i_0}^{k} \int_{i-1}^{i} x^{p/r-2}dx = \frac{r}{p-r}\big(k^{p/r-1} - (i_0-1)^{p/r-1}\big).$$

Bổ đề được chứng minh. $\square$

2.1.9 Định lý. *Giả sử p là một số thực* $(1 \leqslant p \leqslant 2)$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$ *thỏa mãn* $\alpha_{\min} > 1/p$, $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *là một mảng phù hợp nhận giá trị trong không gian Banach p-khả trơn* $\mathbf{E}$ *thỏa mãn* $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *bị trội ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên* X *và* $\mathbb{E}(X_{\mathbf{n}} I_A|\mathcal{G}_{\mathbf{n-1}})$ *là* $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}/\mathcal{B}(\mathbf{E})$ *đo được với mọi* $A \in \sigma(X_{\mathbf{n}})$ *và mọi* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$. *Đặt* $Y_{\mathbf{nk}} = X_{\mathbf{k}}\, I_{(\|X_{\mathbf{k}}\| \leqslant |\mathbf{n}(\alpha)|)}$. *Nếu*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda\, \mathbb{P}(\|X\| > \lambda^{\alpha_{\min}}) = 0 \qquad (2.1.9)$$

thì

$$\frac{1}{|\mathbf{n}(\alpha)|} \sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} \big(X_{\mathbf{k}} - \mathbb{E}(Y_{\mathbf{nk}}|\mathcal{G}_{\mathbf{k-1}})\big) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \textit{khi} \quad |\mathbf{n}| \to \infty. \qquad (2.1.10)$$

Chứng minh. Chúng ta cần chỉ ra hai điều kiện (2.1.2) và (2.1.3) trong Định lý 2.1.1 được thỏa mãn với $a_{\mathbf{n}} = b_{\mathbf{n}} = |\mathbf{n}(\alpha)|$.

Từ (2.1.9) ta suy ra

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} \mathbb{P}\big(\|X_{\mathbf{k}}\| > |\mathbf{n}(\alpha)|\big) &\leqslant C \sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} \mathbb{P}\big(\|X\| > |\mathbf{n}(\alpha)|\big)\\ &= C|\mathbf{n}|\, \mathbb{P}\big(\|X\| > |\mathbf{n}(\alpha)|\big)\\ &\leqslant C|\mathbf{n}|\, \mathbb{P}(\|X\| > |\mathbf{n}|^{\alpha_{\min}}) \to 0 \quad \text{khi} \quad |\mathbf{n}| \to \infty,\end{aligned}$$

do đó (2.1.2) đúng.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\mathbb{E}\|Y_{\mathbf{nk}}-\mathbb{E}(Y_{\mathbf{nk}}|\mathcal{G}_{\mathbf{k-1}})\|^p\to 0\quad\text{khi}\quad|\mathbf{n}|\to\infty.$$

Sử dụng (2.1.9) và bất đẳng thức Jensen ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\mathbb{E}\|Y_{\mathbf{nk}}-\mathbb{E}(Y_{\mathbf{nk}}|\mathcal{G}_{\mathbf{k-1}})\|^p\\
\leqslant&\frac{1}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\mathbb{E}\big(\|Y_{\mathbf{nk}}\|+\|\mathbb{E}(Y_{\mathbf{nk}}|\mathcal{G}_{\mathbf{k-1}})\|\big)^p\\
\leqslant&\frac{1}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\mathbb{E}\big(\|Y_{\mathbf{nk}}\|+\mathbb{E}(\|Y_{\mathbf{nk}}\|\,|\mathcal{G}_{\mathbf{k-1}})\big)^p\\
\leqslant&\frac{2^{p-1}}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\big(\mathbb{E}\|Y_{\mathbf{nk}}\|^p+\mathbb{E}(\mathbb{E}(\|Y_{\mathbf{nk}}\|^p|\mathcal{G}_{\mathbf{k-1}}))\big)\\
=&\frac{2^{p}}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\mathbb{E}\|Y_{\mathbf{nk}}\|^p\\
=&\frac{2^{p}}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\mathbb{E}\big(\|X_{\mathbf{k}}\|^p\,I_{(\|X_{\mathbf{k}}\|\leqslant|\mathbf{n}|^{\alpha_{\min}})}\big)\\
&+\frac{2^{p}}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\mathbb{E}\big(\|X_{\mathbf{k}}\|^p\,I_{(|\mathbf{n}|^{\alpha_{\min}}<\|X_{\mathbf{k}}\|\leqslant|\mathbf{n}(\alpha)|)}\big)\\
=&\frac{2^{p}}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\mathbb{E}\big(\|X_{\mathbf{k}}\|^p\,I_{(\|X_{\mathbf{k}}\|\leqslant|\mathbf{n}|^{\alpha_{\min}})}\big)\\
&+\frac{2^{p}}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}|\mathbf{n}(\alpha)|^p\,\mathbb{P}(|\mathbf{n}|^{\alpha_{\min}}<\|X_{\mathbf{k}}\|\leqslant|\mathbf{n}(\alpha)|)\\
\leqslant&\frac{2^{p}}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\mathbb{E}\big(\|X_{\mathbf{k}}\|^p\,I_{(\|X_{\mathbf{k}}\|\leqslant|\mathbf{n}|^{\alpha_{\min}})}\big)+2^pC\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\mathbb{P}\big(\|X\|>|\mathbf{n}|^{\alpha_{\min}}\big)\\
=&\frac{2^{p}}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\mathbb{E}\big(\|X_{\mathbf{k}}\|^p\,I_{(\|X_{\mathbf{k}}\|\leqslant|\mathbf{n}|^{\alpha_{\min}})}\big)+2^pC\,|\mathbf{n}|\,\mathbb{P}\big(\|X\|>|\mathbf{n}|^{\alpha_{\min}}\big)\\
\leqslant&\frac{2^{p}}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\mathbb{E}\big(\|X_{\mathbf{k}}\|^p\,I_{(\|X_{\mathbf{k}}\|\leqslant|\mathbf{n}|^{\alpha_{\min}})}\big)+o(1)\quad(\text{khi }|\mathbf{n}|\to\infty).
\end{aligned}$$

Do vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\mathbb{E}\Big(\|X_{\mathbf{k}}\|^p\, I_{(\|X_{\mathbf{k}}\|\leqslant|\mathbf{n}|^{\alpha_{\min}})}\Big)\to 0\quad\text{khi}\quad |\mathbf{n}|\to\infty.$$

Từ Bổ đề 2.1.8(i) ta suy ra

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\mathbb{E}\Big(\|X_{\mathbf{k}}\|^p\, I_{(\|X_{\mathbf{k}}\|\leqslant|\mathbf{n}|^{\alpha_{\min}})}\Big)\\
&=\frac{1}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\sum_{i=1}^{|\mathbf{n}|}\mathbb{E}\Big(\|X_{\mathbf{k}}\|^p\, I_{((i-1)^{\alpha_{\min}}<\|X_{\mathbf{k}}\|\leqslant i^{\alpha_{\min}})}\Big)\\
&\leqslant\frac{1}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\sum_{i=1}^{|\mathbf{n}|} i^{p\,\alpha_{\min}}\,\mathbb{P}\Big((i-1)^{\alpha_{\min}}<\|X_{\mathbf{k}}\|\leqslant i^{\alpha_{\min}}\Big)\\
&\leqslant\frac{p\,\alpha_{\min}}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\sum_{i=1}^{|\mathbf{n}|}\Big(\sum_{j=1}^{i} j^{p\,\alpha_{\min}-1}\Big)\,\mathbb{P}\Big((i-1)^{\alpha_{\min}}<\|X_{\mathbf{k}}\|\leqslant i^{\alpha_{\min}}\Big)\\
&=\frac{p\,\alpha_{\min}}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\sum_{j=1}^{|\mathbf{n}|} j^{p\,\alpha_{\min}-1}\sum_{i=j}^{|\mathbf{n}|}\mathbb{P}\Big((i-1)^{\alpha_{\min}}<\|X_{\mathbf{k}}\|\leqslant i^{\alpha_{\min}}\Big)\\
&\leqslant\frac{C}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\sum_{j=1}^{|\mathbf{n}|} j^{p\,\alpha_{\min}-1}\mathbb{P}\Big(\|X_{\mathbf{k}}\|>(j-1)^{\alpha_{\min}}\Big)\\
&\leqslant\frac{C}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\sum_{j=1}^{|\mathbf{n}|} j^{p\,\alpha_{\min}-1}\mathbb{P}\Big(\|X\|>(j-1)^{\alpha_{\min}}\Big)\\
&=\frac{C|\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p}\sum_{j=1}^{|\mathbf{n}|} j^{p\,\alpha_{\min}-1}\mathbb{P}\Big(\|X\|>(j-1)^{\alpha_{\min}}\Big)\\
&\leqslant\frac{C}{|\mathbf{n}|^{p\,\alpha_{\min}-1}}\sum_{j=1}^{|\mathbf{n}|} j^{p\,\alpha_{\min}-1}\mathbb{P}\Big(\|X\|>(j-1)^{\alpha_{\min}}\Big).
\end{aligned}$$

Trong trường hợp $\alpha_{\min}>2/p$, ta được $j^{p\,\alpha_{\min}-2}\leqslant|\mathbf{n}|^{p\,\alpha_{\min}-2}$ với mọi $j=1,2,...,|\mathbf{n}|$. Hơn nữa, từ (2.1.9) ta nhận được

$$\lim_{j\to\infty} j\,\mathbb{P}(\|X\|>(j-1)^{\alpha_{\min}})=0.$$

Những điều này cùng với định lý Stolz đảm bảo rằng

$$0 \leqslant \frac{1}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p} \sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} \mathbb{E}\Big(\|X_{\mathbf{k}}\|^p I_{(\|X_{\mathbf{k}}\| \leqslant |\mathbf{n}|^{\alpha_{\min}})}\Big)$$

$$\leqslant C \frac{1}{|\mathbf{n}|} \sum_{j=1}^{|\mathbf{n}|} j\, \mathbb{P}(\|X\| > (j-1)^{\alpha_{\min}}) \to 0 \quad \text{khi} \quad |\mathbf{n}| \to \infty.$$

Bây giờ chúng ta sẽ xét tiếp trường hợp $1/p < \alpha_{\min} < 2/p$. Vì

$$\lim_{j \to \infty} j\, \mathbb{P}(\|X\| > (j-1)^{\alpha_{\min}}) = 0$$

nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $j_0 \in \mathbb{N}$ thỏa mãn

$$j\, \mathbb{P}(\|X\| > (j-1)^{\alpha_{\min}}) < \varepsilon, \ j \geqslant j_0.$$

Khi đó theo Bổ đề 2.1.8(ii),

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|^{p\,\alpha_{\min}-1}} \sum_{j=1}^{|\mathbf{n}|} j^{p\,\alpha_{\min}-1} \mathbb{P}\Big(\|X\| > (j-1)^{\alpha_{\min}}\Big)$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{n}|^{p\,\alpha_{\min}-1}} \sum_{j=1}^{j_0} j^{p\,\alpha_{\min}-1} \mathbb{P}\Big(\|X\| > (j-1)^{\alpha_{\min}}\Big)$$

$$+ \frac{1}{|\mathbf{n}|^{p\,\alpha_{\min}-1}} \sum_{j=j_0+1}^{|\mathbf{n}|} j^{p\,\alpha_{\min}-1} \mathbb{P}\Big(\|X\| > (j-1)^{\alpha_{\min}}\Big)$$

$$\leqslant \frac{C}{|\mathbf{n}|^{p\,\alpha_{\min}-1}} + \frac{\varepsilon}{|\mathbf{n}|^{p\,\alpha_{\min}-1}} \sum_{j=j_0}^{|\mathbf{n}|} j^{p\,\alpha_{\min}-2}$$

$$\leqslant o(1) + \frac{\varepsilon}{|\mathbf{n}|^{p\,\alpha_{\min}-1}} \frac{1}{p\,\alpha_{\min}-1} \Big(|\mathbf{n}|^{p\,\alpha_{\min}-1} - (j_0-1)^{p\,\alpha_{\min}-1}\Big)$$

$$\leqslant o(1) + \frac{\varepsilon}{p\,\alpha_{\min}-1} \qquad (\text{với mọi } |\mathbf{n}| > j_0).$$

Điều này kéo theo

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|^{p\,\alpha_{\min}-1}} \sum_{j=1}^{|\mathbf{n}|} j^{p\,\alpha_{\min}-1} \mathbb{P}\Big(\|X\| > (j-1)^{\alpha_{\min}}\Big) \to 0 \quad \text{khi} \quad |\mathbf{n}| \to \infty.$$

Vì vậy, định lý được chứng minh. $\square$

Ví dụ sau đây minh họa cho Định lý 2.1.9. Nó sẽ chỉ ra rằng điều kiện $\alpha_{\min} > 1/p$ không thể thay thế bởi điều kiện $\alpha_{\min} \geqslant 1/p$. Ví dụ này được lấy ý tưởng từ Ví dụ 5.1 trong [52].

2.1.10 Ví dụ. Ta đề cập đến không gian ℓ_1 gồm các dãy số thực khả tổng $x = \{x_j, j \geqslant 1\}$ với $\|x\| = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|$. Theo Nhận xét 1.1.8(iii) thì ℓ_1 là không gian 1-khả trơn. Với mỗi $j \geqslant 1$, phần tử thuộc ℓ_1 có vị trí thứ j nhận giá trị bằng 1 và những vị trí còn lại đều nhận giá trị bằng 0 được ký hiệu là $x^{(j)}$. Giả sử $\varphi : \mathbb{N}^d \to \mathbb{N}$ là một song ánh và $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên độc lập thỏa mãn

$$\mathbb{P}\big(X_{\mathbf{n}} = x^{(\varphi(\mathbf{n}))}\big) = \mathbb{P}\big(X_{\mathbf{n}} = -x^{(\varphi(\mathbf{n}))}\big) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d.$$

Khi đó $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên độc lập và có kỳ vọng bằng 0. Hơn nữa, $\big\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}} = \sigma\{X_{\mathbf{k}}, \mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}\}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\big\}$ là một mảng phù hợp, nhận giá trị trong không gian Banach 1-khả trơn ℓ_1 thỏa mãn $\mathbb{E}(X_{\mathbf{n}} I_A | \mathcal{G}_{\mathbf{n-1}})$ là $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}$-đo được với mọi $A \in \sigma(X_{\mathbf{n}})$ và mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$.

Nhận thấy $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ bị trội ngẫu nhiên bởi $X_{\mathbf{1}}$ và giả thiết (2.1.9) được thỏa mãn với $\alpha = \mathbf{1}$. Tuy nhiên, với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$,

$$\frac{1}{|\mathbf{n}(\alpha)|} \Big\| \sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} \big(X_{\mathbf{k}} - \mathbb{E}(Y_{\mathbf{nk}} | \mathcal{G}_{\mathbf{k-1}})\big) \Big\| = \frac{1}{|\mathbf{n}|} \Big\| \sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} X_{\mathbf{k}} \Big\| = 1.$$

Vì vậy, kết luận (2.1.10) của Định lý 2.1.9 không đúng.

Hệ quả sau đây thiết lập luật yếu số lớn Kolmogorov-Feller cho mảng các biến ngẫu nhiên độc lập.

2.1.11 Hệ quả. *Giả sử p là một số thực $(1 \leqslant p \leqslant 2)$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$ thỏa mãn $\alpha_{\min} > 1/p$, $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên độc lập, nhận giá trị trong một không gian Banach p-khả trơn và bị trội ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X. Đặt $Y_{\mathbf{nk}} = X_{\mathbf{k}}\, I_{(\|X_{\mathbf{k}}\| \leqslant |\mathbf{n}(\alpha)|)}$.*

Khi đó (2.1.9) *kéo theo*

$$\frac{1}{|\mathbf{n}(\alpha)|}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}(X_{\mathbf{k}}-\mathbb{E}Y_{\mathbf{nk}})\xrightarrow{\mathbb{P}}0 \quad khi \quad |\mathbf{n}|\to\infty.$$

2.1.12 Hệ quả. *Giả sử r là một số thực ($r > 1/2$), $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n}\in\mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối và nhận giá trị thực. Nếu*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\,\mathbb{P}(|X_{\mathbf{1}}|>\lambda^r)=0$$

thì

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|^r}\Big(\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}X_{\mathbf{k}}-|\mathbf{n}|\,\mathbb{E}\big(X_{\mathbf{1}}\,I_{(|X_{\mathbf{1}}|\leqslant|\mathbf{n}|^r)}\big)\Big)\xrightarrow{\mathbb{P}}0 \quad khi \quad |\mathbf{n}|\to\infty.$$

Trong trường hợp $d=1$ và $r=1$, Hệ quả 2.1.12 kéo theo luật yếu số lớn Kolmogorov-Feller.

2.2. Luật yếu số lớn đối với mảng phù hợp theo hàng

Hai khái niệm mảng phù hợp theo hàng và mảng hiệu martingale theo hàng đã được giới thiệu bởi Nguyễn Văn Quảng và Nguyễn Ngọc Huy trong [47]. Trong mục này, chúng tôi tiếp tục nghiên cứu tiêu chuẩn hội tụ suy biến và luật yếu số lớn Kolmogorov-Feller đối với mảng phù hợp theo hàng, nhận giá trị trong không gian Banach p-khả trơn.

Trên $\mathbb{N}^2$, ta xét quan hệ thứ tự từ điển: $(i,j)\ll(k,l)$ nếu $i<k$, hoặc $i=k$ và $j<l$. Quan hệ thứ tự này được sử dụng trong hai định nghĩa sau đây:

2.2.1 Định nghĩa. Giả sử $\{\mathcal{F}_{mn}, m\geqslant 1, n\geqslant 1\}$ là một mảng các σ-đại số con của $\mathcal{F}$ thỏa mãn $\mathcal{F}_{ij}\subset\mathcal{F}_{kl}$ với mọi $(i,j)\ll(k,l)$, $\{X_{mn}, m\geqslant 1, n\geqslant 1\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Banach $\mathbf{E}$ và X_{mn} là $\mathcal{F}_{mn}/\mathcal{B}(\mathbf{E})$ đo được với mọi $m\geqslant 1, n\geqslant 1$. Khi đó $\{X_{mn}, \mathcal{F}_{mn}, m\geqslant 1, n\geqslant 1\}$ được gọi là một *mảng phù hợp theo hàng*.

2.2.2 Chú ý. Trong mục này, ta quy ước

$$\mathcal{F}_{1,0} = \{\emptyset, \Omega\}, \quad \mathcal{F}_{i,0} = \bigvee_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}_{i-1,j} \ \text{ nếu } i > 1.$$

2.2.3 Định nghĩa. Mảng phù hợp theo hàng $\{X_{mn}, \mathcal{F}_{mn}, m \geqslant 1, n \geqslant 1\}$ được gọi là một *mảng hiệu martingale theo hàng* nếu nó lập thành hiệu martingale trên mỗi hàng, nghĩa là, với mỗi $m \geqslant 1$,

$$\mathbb{E}(X_{m,n}|\mathcal{F}_{m,n-1}) = 0 \ \text{ h.c.c.}, \quad n \geqslant 1.$$

Bổ đề sau đây thiết lập một bất đẳng thức moment đối với mảng hiệu martingale theo hàng, nhận giá trị trong không gian Banach p-khả trơn.

2.2.4 Bổ đề. *Nếu* $\mathbf{E}$ *là một không gian Banach* p*-khả trơn* $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ *thì tồn tại hằng số dương* $C = C_{(p)}$ *sao cho với mọi mảng hiệu martingale theo hàng* $\{X_{mn}, \mathcal{F}_{mn}, m \geqslant 1, n \geqslant 1\}$ *nhận giá trị trong* $\mathbf{E}$*,*

$$\mathbb{E}\Big\| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \Big\|^p \leqslant C \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\|X_{ij}\|^p, \quad m \geqslant 1, n \geqslant 1. \tag{2.2.1}$$

Chứng minh. Với mỗi $m \geqslant 1$ và $n \geqslant 1$, ta liên kết m hàng của mảng $\{X_{ij}, \mathcal{F}_{ij}, 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n\}$ để thu được dãy $\{X'_j, \mathcal{F}'_j, 1 \leqslant j \leqslant mn\}$ bằng cách đặt

$$X'_1 = X_{11}, X'_2 = X_{12}, ..., X'_n = X_{1n},$$
$$..............., X'_{(i-1)n+j} = X_{ij}, ...$$
$$X'_{(m-1)n+1} = X_{m1}, ..., X'_{m \cdot n} = X_{mn},$$

và

$$\mathcal{F}'_1 = \mathcal{F}_{11}, \mathcal{F}'_2 = \mathcal{F}_{12}, ..., \mathcal{F}'_n = \mathcal{F}_{1n},$$
$$..............., \mathcal{F}'_{(i-1)n+j} = \mathcal{F}_{ij}, ...$$
$$\mathcal{F}'_{(m-1)n+1} = \mathcal{F}_{m1}, ..., \mathcal{F}'_{m \cdot n} = \mathcal{F}_{mn}.$$

Khi đó

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = \sum_{i=1}^{mn} X'_i, \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \|X_{ij}\|^p = \sum_{i=1}^{mn} \|X'_i\|^p. \tag{2.2.2}$$

Hơn nữa, vì $\{X_{mn}, \mathcal{F}_{mn}, m \geqslant 1, n \geqslant 1\}$ là một mảng hiệu martingale theo hàng nên với mọi $(i,j) \ll (k,l)$,

$$\mathbb{E}(X_{kl}|\mathcal{F}_{ij}) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X_{kl}|\mathcal{F}_{k,l-1})|\mathcal{F}_{ij}\Big) = \mathbb{E}(0|\mathcal{F}_{ij}) = 0.$$

Điều này đảm bảo rằng $\{X'_j, \mathcal{F}'_j, 1 \leqslant j \leqslant mn\}$ là một hiệu martingale. Từ (2.2.2) và Bổ đề 1.1.10 ta nhận được (2.2.1). □

Định lý sau đây mở rộng tiêu chuẩn hội tụ suy biến đối với mảng phù hợp theo hàng. Chú ý rằng, trong kết quả này, điều kiện đo được tương tự như trong Định lý 2.1.1 là không cần thiết.

2.2.5 Định lý. *Giả sử $\{a_{mn}, m \geqslant 1, n \geqslant 1\}$ và $\{b_{mn}, m \geqslant 1, n \geqslant 1\}$ là hai mảng các số thực dương, $\{X_{mn}, \mathcal{F}_{mn}, m \geqslant 1, n \geqslant 1\}$ là một mảng phù hợp theo hàng và nhận giá trị trong một không gian Banach p-khả trơn $(1 \leqslant p \leqslant 2)$. Đặt $Y_{mnij} = X_{ij}\, I_{(\|X_{ij}\| \leqslant a_{mn})}$. Khi đó*

$$\frac{1}{b_{mn}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Big(X_{ij} - \mathbb{E}(Y_{mnij}|\mathcal{F}_{i,j-1})\Big) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad khi \quad mn \to \infty \tag{2.2.3}$$

nếu hai điều kiện sau đây được thỏa mãn:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(\|X_{ij}\| > a_{mn}) \to 0 \quad khi \quad mn \to \infty, \tag{2.2.4}$$

$$\frac{1}{b_{mn}^p} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\|Y_{mnij} - \mathbb{E}(Y_{mnij}|\mathcal{F}_{i,j-1})\|^p \to 0 \quad khi \quad mn \to \infty. \tag{2.2.5}$$

Chứng minh. Với mọi $\varepsilon > 0$, ta có

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\frac{1}{b_{mn}}\Big\| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Big(X_{ij} - \mathbb{E}(Y_{mnij}|\mathcal{F}_{i,j-1})\Big)\Big\| > \varepsilon\Big) \\
&\leqslant \mathbb{P}\Big(\frac{1}{b_{mn}}\Big\| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (X_{ij} - Y_{mnij})\Big\| > \varepsilon/2\Big) \\
&\quad + \mathbb{P}\Big(\frac{1}{b_{mn}}\Big\| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Big(Y_{mnij} - \mathbb{E}(Y_{mnij}|\mathcal{F}_{i,j-1})\Big)\Big\| > \varepsilon/2\Big).
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Từ (2.2.4) ta thu được

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\frac{1}{b_{mn}}\Big\|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-Y_{mnij})\Big\| > \varepsilon/2\Big)\\
&= \mathbb{P}\Big(\frac{1}{b_{mn}}\Big\|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}\ I_{(\|X_{ij}\|>a_{mn})}\Big\| > \varepsilon/2\Big)\\
&\leqslant \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}(\|X_{ij}\|>a_{mn})\Big)\\
&\leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(\|X_{ij}\|>a_{mn}) \to 0 \quad \text{khi} \quad mn\to\infty. \qquad (2.2.7)
\end{aligned}$$

Nhận thấy $\{Y_{mnij}-\mathbb{E}(Y_{mnij}|\mathcal{F}_{i,j-1}),\mathcal{F}_{ij}, i\geqslant 1, j\geqslant 1\}$ là một mảng phù hợp theo hàng. Hơn nữa, với mọi $i\geqslant 1$ và $j\geqslant 1$,

$$\mathbb{E}\big(Y_{mnij}-\mathbb{E}(Y_{mnij}|\mathcal{F}_{i,j-1})|\mathcal{F}_{i,j-1}\big)=0.$$

Do đó $\{Y_{mnij}-\mathbb{E}(Y_{mnij}|\mathcal{F}_{i,j-1}),\mathcal{F}_{ij}, i\geqslant 1, j\geqslant 1\}$ là một mảng hiệu martingale theo hàng. Sử dụng bất đẳng thức Markov, Bổ đề 2.2.4 và điều kiện (2.2.5), ta có

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\Big\|\frac{1}{b_{mn}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\big(Y_{mnij}-\mathbb{E}(Y_{mnij}|\mathcal{F}_{i,j-1})\big)\Big\| > \varepsilon/2\Big)\\
&\leqslant \frac{2^p}{\varepsilon^p}\,\mathbb{E}\Big\|\frac{1}{b_{mn}}\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\big(Y_{mnij}-\mathbb{E}(Y_{mnij}|\mathcal{F}_{i,j-1})\big)\Big\|^p\\
&= \frac{2^p}{b_{mn}^p\varepsilon^p}\,\mathbb{E}\Big\|\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\big(Y_{mnij}-\mathbb{E}(Y_{mnij}|\mathcal{F}_{i,j-1})\big)\Big\|^p\\
&\leqslant \frac{C2^p}{b_{mn}^p\varepsilon^p}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\|Y_{mnij}-\mathbb{E}(Y_{mnij}|\mathcal{F}_{i,j-1})\|^p\to 0 \text{ khi } mn\to\infty. \quad (2.2.8)
\end{aligned}$$

Kết hợp (2.2.6), (2.2.7) và (2.2.8) ta nhận được (2.2.3). □

Hệ quả sau đây được suy ra trực tiếp từ Định lý 2.2.5 và đưa ra tiêu chuẩn hội tụ suy biến đối với mảng phù hợp theo hàng.

2.2.6 Hệ quả. *Giả sử* $\{a_{mn}, m \geqslant 1, n \geqslant 1\}$ *và* $\{b_{mn}, m \geqslant 1, n \geqslant 1\}$ *là hai mảng các số thực dương,* $\{X_{mn}, \mathcal{F}_{mn}, m \geqslant 1, n \geqslant 1\}$ *là một mảng phù hợp theo hàng và nhận giá trị trong một không gian Banach p-khả trơn* $(1 \leqslant p \leqslant 2)$. *Đặt* $Y_{mnij} = X_{ij}\, I_{(\|X_{ij}\| \leqslant a_{mn})}$. *Khi đó*

$$\frac{1}{b_{mn}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad khi \quad mn \to \infty$$

nếu

$$\frac{1}{b_{mn}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(Y_{mnij} | \mathcal{F}_{i,j-1}) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad khi \quad mn \to \infty$$

và hai điều kiện (2.2.4), (2.2.5) *được thỏa mãn.*

Rõ ràng, nếu $X_{mn} \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ khi $mn \to \infty$ thì $X_{1n} \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ khi $n \to \infty$. Do vậy, từ Hệ quả 2.2.6 ta thu được Định lý 2.1 trong [48].

Định lý sau đây thiết lập luật yếu số lớn Kolmogorov-Feller đối với mảng phù hợp theo hàng. Trường hợp $r = s$ và $\mathbf{E} = \mathbb{R}$, kết quả này kéo theo Định lý 3.4 trong [47]. Phần chứng minh của Định lý 2.2.7 là hoàn toàn tương tự như đối với Định lý 2.1.9 nên nó sẽ không được đề cập.

2.2.7 Định lý. *Giả sử p, r, s là các số thực dương thỏa mãn* $1 \leqslant p \leqslant 2$ *và* $r \leqslant s < p$, $\{X_{mn}, \mathcal{F}_{mn}, m \geqslant 1, n \geqslant 1\}$ *là một mảng phù hợp theo hàng, nhận giá trị trong một không gian Banach p-khả trơn và thỏa mãn điều kiện* $\{X_{mn}, m \geqslant 1, n \geqslant 1\}$ *bị trội ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên* X. *Đặt* $Y_{mnij} = X_{ij}\, I_{(\|X_{ij}\| \leqslant m^{1/r} n^{1/s})}$. *Nếu*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda\, \mathbb{P}\big(\|X\| > \lambda^{1/s}\big) = 0$$

thì

$$\frac{1}{m^{1/r} n^{1/s}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \big(X_{ij} - \mathbb{E}(Y_{mnij} | \mathcal{F}_{i,j-1})\big) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad khi \quad mn \to \infty.$$

2.3. Kết luận của Chương 2

Trong chương này, luận án đã giải quyết được những vấn đề sau:

- Mở rộng tiêu chuẩn hội tụ suy biến đối với mảng phù hợp và mảng phù hợp theo hàng;

- Thiết lập luật yếu số lớn Kolmogorov-Feller đối với mảng phù hợp và mảng phù hợp theo hàng;

- Đưa ra các ví dụ làm sáng tỏ hơn cho các kết quả chính và những vấn đề liên quan.

CHƯƠNG 3

LUẬT MẠNH SỐ LỚN ĐỐI VỚI MẢNG CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN

Trong chương này, chúng tôi thiết lập một số luật mạnh số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên cho hai trường hợp $\mathbf{n} \to \infty$ và $|\mathbf{n}| \to \infty$. Các kết quả chính của chương được viết dựa trên các bài báo [28], [29], [44] và [46].

3.1. Các khái niệm và kết quả bổ trợ

Mục này trình bày phần kiến thức chuẩn bị bao gồm một số ký hiệu và khái niệm cùng với bốn bổ đề bổ trợ liên quan đến nội dung của hai mục tiếp theo.

Giả sử $\{\omega_1(j), j \geqslant 1\}$, $\{\omega_2(j), j \geqslant 1\}$,..., $\{\omega_d(j), j \geqslant 1\}$ là những dãy tăng ngặt các số nguyên dương thỏa mãn $\omega_i(1) = 1$ với mọi $i = 1, 2, ..., d$. Với mỗi $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$ và mỗi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, chúng ta sử dụng các ký hiệu sau:

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathbf{n}} &= \big(\omega_1(n_1), \omega_2(n_2), ..., \omega_d(n_d)\big),\\
\Delta_{\mathbf{n}} &= \{\mathbf{k} : \omega_{\mathbf{n}} \preceq \mathbf{k} \prec \omega_{\mathbf{n}+\mathbf{1}}\},\\
\Delta^{(\mathbf{m})} &= \{\mathbf{k} : \mathbf{2}^{\mathbf{m}} \preceq \mathbf{k} \prec \mathbf{2}^{\mathbf{m}+\mathbf{1}}\},\\
\Delta_{\mathbf{n}}^{(\mathbf{m})} &= \Delta_{\mathbf{n}} \cap \Delta^{(\mathbf{m})},\\
\Lambda_{\mathbf{m}} &= \{\mathbf{k} : \Delta_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{m})} \neq \emptyset\},\\
\varphi(\mathbf{n}) &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} \operatorname{card}(\Lambda_{\mathbf{k}})\, I_{(\Delta^{(\mathbf{k})})}(\mathbf{n}),\\
\psi(\mathbf{n}) &= \max_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} \varphi(\mathbf{k}),
\end{aligned}$$

trong trường hợp $\mathbf{n} \in \Lambda_{\mathbf{m}}$, ta ký hiệu

$$r_{\mathbf{n}}^{(\mathbf{m})}(i) = \min\left\{r\colon r \in \left[\omega_i(n_i), \omega_i(n_i+1)\right) \cap [2^{m_i}, 2^{m_i+1})\right\} \quad (1 \leqslant i \leqslant d),$$
$$\mathbf{r}_{\mathbf{n}}^{(\mathbf{m})} = \left(r_{\mathbf{n}}^{(\mathbf{m})}(1), r_{\mathbf{n}}^{(\mathbf{m})}(2), ..., r_{\mathbf{n}}^{(\mathbf{m})}(d)\right).$$

Dễ thấy rằng nếu $\omega(\mathbf{n}) = \mathbf{2^{n-1}}$ với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ thì $\Delta_{\mathbf{n}} = \Delta^{(\mathbf{n-1})}$, do đó $\varphi(\mathbf{n}) = \psi(\mathbf{n}) = 1$ với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$.

Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ đề cập đến khái niệm mảng hiệu martingale theo khối. Để thuận lợi cho việc đưa ra khái niệm này, chúng ta cần trình bày định nghĩa mảng hiệu martingale cho trường hợp tập chỉ số được thu hẹp theo khối. Chú ý rằng khái niệm cơ sở ngẫu nhiên và khái niệm mảng phù hợp được sử dụng sau đây chỉ là sự thu hẹp chỉ số từ các khái niệm tương ứng đã được đề cập trong Mục 1.2.

Giả sử $\{\mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d, \mathbf{n} \preceq \mathbf{m}\}$ là một cơ sở ngẫu nhiên (quy ước $\mathcal{F}_{\mathbf{n}} = \{\emptyset, \Omega\}$ nếu $|\mathbf{n}| = 0$). Với mỗi $\mathbf{n}$: $\mathbf{0} \preceq \mathbf{n} \preceq \mathbf{m-1}$, đặt

$$\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^1 = \bigvee_{1 \leqslant l_i \leqslant m_i\ (2 \leqslant i \leqslant d)} \mathcal{F}_{n_1 l_2 l_3 \ldots l_d} := \sigma\left(\bigcup_{l_2=1}^{m_2} \bigcup_{l_3=1}^{m_3} \ldots \bigcup_{l_d=1}^{m_d} \mathcal{F}_{n_1 l_2 l_3 \ldots l_d}\right),$$
$$\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^j = \bigvee_{1 \leqslant l_i \leqslant m_i\ (1 \leqslant i \leqslant j-1)} \quad \bigvee_{1 \leqslant l_i \leqslant m_i\ (j+1 \leqslant i \leqslant d)} \mathcal{F}_{l_1 \ldots l_{j-1} n_j l_{j+1} \ldots l_d} \quad \text{nếu} \quad 1 < j < d,$$
$$\mathcal{F}_{\mathbf{n}}^d = \bigvee_{1 \leqslant l_i \leqslant m_i\ (1 \leqslant i \leqslant d-1)} \mathcal{F}_{l_1 l_2 \ldots l_{d-1} n_d},$$

trong trường hợp $d = 1$, đặt $\mathcal{F}_n^1 = \mathcal{F}_n$.

3.1.1 Định nghĩa. Mảng phù hợp $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d, \mathbf{n} \preceq \mathbf{m}\}$ được gọi là một *mảng hiệu martingale* nếu $\mathbb{E}(X_{\mathbf{n}} | \mathcal{F}_{\mathbf{n-1}}^i) = 0$ h.c.c. với mọi $\mathbf{1} \preceq \mathbf{n} \preceq \mathbf{m}$ và mọi $i = 1, 2, ..., d$.

3.1.2 Nhận xét.

(i) Nếu $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng hiệu martingale thì với mọi $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{N}^d$ $(\mathbf{k} \preceq \mathbf{l})$, $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{k} \preceq \mathbf{n} \preceq \mathbf{l}\}$ là một mảng hiệu martingale.

(ii) Nếu $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{1} \preceq \mathbf{n} \preceq \mathbf{m}\}$ là một mảng hiệu martingale thì với mọi $\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{l} \preceq \mathbf{m}$, $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{k} \preceq \mathbf{n} \preceq \mathbf{l}\}$ là một mảng hiệu martingale.

(iii) Nếu $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d, \mathbf{n} \preceq \mathbf{m}\}$ là một mảng hiệu martingale thì $\{X'_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}'_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng hiệu martingale, trong đó

$$X'_{\mathbf{n}} = \begin{cases} X_{\mathbf{n}} & \text{nếu } \mathbf{1} \preceq \mathbf{n} \preceq \mathbf{m}, \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

và

$$\mathcal{F}'_{\mathbf{n}} = \begin{cases} \mathcal{F}_{\mathbf{n}} & \text{nếu } \mathbf{1} \preceq \mathbf{n} \preceq \mathbf{m}, \\ \sigma\{\mathcal{F}_{\mathbf{k}} : \ \mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{m}, \ \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}\} & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$.

3.1.3 Định nghĩa. Giả sử $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên và $\{\mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các σ-đại số con của $\mathcal{F}$. Khi đó mảng $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ được gọi là một *mảng hiệu martingale theo khối* đối với các khối $\{\Delta_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d\}$ nếu $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \Delta_{\mathbf{k}}\}$ là một mảng hiệu martingale với mọi $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$.

3.1.4 Định nghĩa. Mảng các biến ngẫu nhiên $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ được gọi là một *mảng độc lập theo khối* đối với các khối $\{\Delta_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d\}$ nếu $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \Delta_{\mathbf{k}}\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên độc lập với mọi $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$.

3.1.5 Nhận xét. Tập tất cả các mảng hiệu martingale theo khối rộng hơn tập tất cả các mảng các biến ngẫu nhiên độc lập theo khối và có kỳ vọng bằng 0.

Khái niệm dãy và mảng các biến ngẫu nhiên p-trực giao đã lần lượt được giới thiệu bởi J. O. Howell và R. L. Taylor trong [27], F. Móricz, K. L. Su và R. L. Taylor trong [39]. Định nghĩa sau đây là dạng nhiều chiều của Định nghĩa 2.1 trong [39].

3.1.6 Định nghĩa. Mảng các biến ngẫu nhiên $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d, \mathbf{n} \preceq \mathbf{m}\}$ được gọi là một *mảng p-trực giao* $(1 \leqslant p < \infty)$ nếu $\mathbb{E}\|X_{\mathbf{n}}\|^p < \infty$ với mọi $\mathbf{n} \preceq \mathbf{m}$ và

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big\|\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{n}\preceq\mathbf{k}} a_{\pi_1(n_1)\pi_2(n_2)\dots\pi_d(n_d)}\, X_{\pi_1(n_1)\pi_2(n_2)\dots\pi_d(n_d)}\Big\|^p\\ &\leqslant \mathbb{E}\Big\|\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{n}\preceq\mathbf{l}} a_{\pi_1(n_1)\pi_2(n_2)\dots\pi_d(n_d)}\, X_{\pi_1(n_1)\pi_2(n_2)\dots\pi_d(n_d)}\Big\|^p\end{aligned}$$

với mọi $\mathbf{k}$, $\mathbf{l}$ ($\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{l} \preceq \mathbf{m}$), mọi mảng các số thực $\{a_{\mathbf{n}}, \mathbf{1} \preceq \mathbf{n} \preceq \mathbf{m}\}$ và mọi phép hoán vị π_1, π_2,..., π_d tương ứng trên các tập số nguyên $\{1, 2, ..., l_1\}$, $\{1, 2, ..., l_2\}$,..., $\{1, 2, ..., l_d\}$.

3.1.7 Nhận xét.

(i) Trong trường hợp $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \preceq \mathbf{m}\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực, nếu $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \preceq \mathbf{m}\}$ là một mảng trực giao (xem [37, tr. 256]) thì nó là một mảng 2-trực giao.

(ii) Nếu $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \preceq \mathbf{m}\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên p-trực giao ($1 \leqslant p < \infty$) thì $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{k} \preceq \mathbf{n} \preceq \mathbf{l}\}$ là một mảng p-trực giao với mọi $\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{l} \preceq \mathbf{m}$.

3.1.8 Định nghĩa. Mảng các biến ngẫu nhiên $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ được gọi là một *mảng p-trực giao theo khối* ($1 \leqslant p < \infty$) đối với các khối $\{\Delta_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d\}$ nếu $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \Delta_{\mathbf{k}}\}$ là một mảng p-trực giao với mọi $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$.

Bổ đề sau đây đã được chứng minh bởi F. Móricz, K. L. Su và R. L. Taylor cho trường hợp $d = 2$ (xem [39, Bổ đề 3.2]). Trong trường hợp $d > 2$, nó cũng được chứng minh tương tự.

3.1.9 Bổ đề. *Nếu $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d, \mathbf{n} \preceq \mathbf{m}\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên p-trực giao, nhận giá trị trong một không gian Banach Rademacher loại p ($1 \leqslant p \leqslant 2$) thì tồn tại một hằng số dương C (không phụ thuộc vào $\mathbf{m}$) sao cho*

$$\mathbb{E}\Big(\max_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{m}}\Big\|\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}} X_{\mathbf{l}}\Big\|\Big)^p \leqslant C\prod_{i=1}^{d}(1+\log_2 m_i)^p \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{m}} \mathbb{E}\|X_{\mathbf{k}}\|^p.$$

3.1.10 Bổ đề. *Giả sử* $\Phi_1(.)$, $\Phi_2(.)$,..., $\Phi_d(.)$ *là những hàm nhận giá trị dương, không giảm và không bị chặn trên tập* $(0,\infty)$, $\{x_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d\}$ *là một mảng các số thực thỏa mãn*

$$\lim_{|\mathbf{n}|\to\infty} x_{\mathbf{n}} = 0. \tag{3.1.1}$$

Nếu

$$\sup_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^d}\Big(\Big(\prod_{i=1}^d \Phi_i(2^{n_i})\Big)^{-1}\sum_{\mathbf{0}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\Big(\prod_{i=1}^d \Phi_i(2^{k_i+1})\Big)\Big) < \infty$$

thì

$$\Big(\prod_{i=1}^d \Phi_i(2^{n_i})\Big)^{-1}\sum_{\mathbf{0}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\Big(\prod_{i=1}^d \Phi_i(2^{k_i+1})\Big)x_{\mathbf{k}} \to 0 \quad \textit{khi} \quad |\mathbf{n}|\to\infty. \tag{3.1.2}$$

Chứng minh. Đặt

$$C = \sup_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^d}\Big(\Big(\prod_{i=1}^d \Phi_i(2^{n_i})\Big)^{-1}\sum_{\mathbf{0}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\Big(\prod_{i=1}^d \Phi_i(2^{k_i+1})\Big)\Big). \tag{3.1.3}$$

Khi đó điều kiện (3.1.1) đảm bảo rằng với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho với mọi $\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d$ mà $|\mathbf{n}| \geqslant n_0$ thì

$$|x_{\mathbf{n}}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2C}. \tag{3.1.4}$$

Mặt khác, vì $\Phi_1(.)$, $\Phi_2(.)$,..., $\Phi_d(.)$ là những hàm nhận giá trị dương, không giảm và không bị chặn trên tập $(0,\infty)$ nên

$$\prod_{i=1}^d \Phi_i(2^{n_i}) \to \infty \quad \text{khi} \quad |\mathbf{n}|\to\infty.$$

Do đó, tồn tại một số nguyên dương $m_0 > n_0$ sao cho với mọi $\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d$ mà $|\mathbf{n}| \geqslant m_0$ thì

$$\Big|\Big(\prod_{i=1}^d \Phi_i(2^{n_i})\Big)^{-1}\sum_{|\mathbf{k}|<n_0,\ \mathbf{0}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\Big(\prod_{i=1}^d \Phi_i(2^{k_i+1})\Big)x_{\mathbf{k}}\Big| < \varepsilon/2. \tag{3.1.5}$$

Từ (3.1.3), (3.1.4) và (3.1.5), với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ ($|\mathbf{n}| \geqslant m_0$), ta có

$$\begin{aligned}
&\Big|\Big(\prod_{i=1}^{d}\Phi_i(2^{n_i})\Big)^{-1}\sum_{\mathbf{0}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\Big(\prod_{i=1}^{d}\Phi_i(2^{k_i+1})\Big)x_{\mathbf{k}}\Big|\\
&\leqslant \Big|\Big(\prod_{i=1}^{d}\Phi_i(2^{n_i})\Big)^{-1}\sum_{|\mathbf{k}|<n_0,\ \mathbf{0}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\Big(\prod_{i=1}^{d}\Phi_i(2^{k_i+1})\Big)x_{\mathbf{k}}\Big|\\
&\quad+\Big|\Big(\prod_{i=1}^{d}\Phi_i(2^{n_i})\Big)^{-1}\sum_{|\mathbf{k}|\geqslant n_0,\ \mathbf{0}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\Big(\prod_{i=1}^{d}\Phi_i(2^{k_i+1})\Big)x_{\mathbf{k}}\Big|\\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+C\frac{\varepsilon}{2C}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

Vì vậy, ta nhận được kết luận (3.1.2). □

Bổ đề tiếp theo được lấy ý tưởng từ Bổ đề 2.6 của I. Fazekas và T. Tómács [12]. Bổ đề này là một dạng nhiều chiều của bổ đề Kronecker.

3.1.11 Bổ đề. *Giả sử $\{x_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các số thực không âm và $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng không giảm các số thực dương thỏa mãn $b_{\mathbf{n}} \to \infty$ khi $\mathbf{n} \to \infty$. Nếu*

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} x_{\mathbf{n}} < \infty$$

thì

$$\frac{1}{b_{\mathbf{n}}}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} b_{\mathbf{k}}x_{\mathbf{k}} \to 0 \quad \textit{khi} \quad \mathbf{n}\to\infty. \tag{3.1.6}$$

Chứng minh. Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\mathbf{n}_0 \in \mathbb{N}^d$ sao cho

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^d} x_{\mathbf{k}} - \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}_0} x_{\mathbf{k}} \leqslant \varepsilon.$$

Do đó, với mọi $\mathbf{n} \succeq \mathbf{n}_0$,

$$0 \leqslant \frac{1}{b_{\mathbf{n}}}\Big(\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} b_{\mathbf{k}}x_{\mathbf{k}} - \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}_0} b_{\mathbf{k}}x_{\mathbf{k}}\Big) \leqslant \Big(\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} x_{\mathbf{k}} - \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}_0} x_{\mathbf{k}}\Big) \leqslant \varepsilon,$$

điều này kéo theo

$$\frac{1}{b_{\mathbf{n}}}\Big(\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} b_{\mathbf{k}}x_{\mathbf{k}} - \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}_0} b_{\mathbf{k}}x_{\mathbf{k}}\Big) \to 0 \quad \text{khi} \quad \mathbf{n}\to\infty. \tag{3.1.7}$$

Mặt khác, vì $b_{\mathbf{n}} \to \infty$ khi $\mathbf{n} \to \infty$ nên

$$\frac{1}{b_{\mathbf{n}}}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}_0} b_{\mathbf{k}}x_{\mathbf{k}} \to 0 \quad \text{khi} \quad \mathbf{n}\to\infty. \tag{3.1.8}$$

Kết hợp (3.1.7) và (3.1.8) ta nhận được (3.1.6). □

3.1.12 Bổ đề. *Giả sử $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n}\in\mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực thỏa mãn*

$$\lim_{\mathbf{n}\to\infty}\mathbb{P}\Big(\sup_{\mathbf{k}\succeq\mathbf{n}}|X_{\mathbf{k}}| \geqslant \varepsilon\Big) = 0 \tag{3.1.9}$$

với mọi $\varepsilon > 0$. Khi đó $X_{\mathbf{n}} \to 0$ h.c.c. khi $\mathbf{n}\to\infty$.

Chứng minh. Với mỗi $\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d$ và mỗi $i, j \geqslant 1$, đặt

$$A^{(i)}_{\mathbf{n}} = \bigcup_{\mathbf{k}\succeq\mathbf{n}}\big(|X_{\mathbf{k}}| \geqslant \frac{1}{i}\big),\ B^{(i)}_j = A^{(i)}_{j,j,\ldots,j}.$$

Khi đó

$$\bigcap_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} A^{(i)}_{\mathbf{n}} = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} B^{(i)}_j,$$

và điều này kéo theo

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} A^{(i)}_{\mathbf{n}}\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} B^{(i)}_j\Big) = \lim_{j\to\infty}\mathbb{P}(B^{(i)}_j).$$

Với mỗi $i \geqslant 1$, mảng $\{\mathbb{P}(A^{(i)}_{\mathbf{n}}), \mathbf{n}\in\mathbb{N}^d\}$ và dãy $\{\mathbb{P}(B^{(i)}_j), j\geqslant 1\}$ không tăng và bị chặn dưới bởi 0 nên

$$\lim_{\mathbf{n}\to\infty}\mathbb{P}(A^{(i)}_{\mathbf{n}}) = \lim_{j\to\infty}\mathbb{P}(B^{(i)}_j) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} A^{(i)}_{\mathbf{n}}\Big). \tag{3.1.10}$$

Từ (3.1.9) và (3.1.10) ta nhận được

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d}\bigcup_{\mathbf{k}\succeq\mathbf{n}}\big(|X_{\mathbf{k}}|\geqslant\frac{1}{i}\big)\Big)=\lim_{\mathbf{n}\to\infty}\mathbb{P}\Big(\bigcup_{\mathbf{k}\succeq\mathbf{n}}\big(|X_{\mathbf{k}}|\geqslant\frac{1}{i}\big)\Big)$$
$$\leqslant\lim_{\mathbf{n}\to\infty}\mathbb{P}\Big(\sup_{\mathbf{k}\succeq\mathbf{n}}|X_{\mathbf{k}}|\geqslant\frac{1}{i}\Big)=0.$$

Đặt

$$A=\bigcup_{i\geqslant 1}\bigcap_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d}\bigcup_{\mathbf{k}\succeq\mathbf{n}}\big(|X_{\mathbf{k}}|\geqslant\frac{1}{i}\big).$$

Khi đó $\mathbb{P}(A)=0$ và nếu $\omega\notin A$ thì

$$\omega\in\bigcap_{i\geqslant 1}\bigcup_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d}\bigcap_{\mathbf{k}\succeq\mathbf{n}}\big(|X_{\mathbf{k}}|<\frac{1}{i}\big),$$

nghĩa là với mọi $i\geqslant 1$, tồn tại $\mathbf{l}\in\mathbb{N}^d$ sao cho $|X_{\mathbf{k}}(\omega)|<1/i$ với mọi $\mathbf{k}\succeq\mathbf{l}$. Điều này kéo theo $X_{\mathbf{k}}\to 0$ h.c.c. khi $\mathbf{k}\to\infty$. $\square$

3.2. Luật mạnh số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên cho trường hợp $\mathbf{n}\to\infty$

Mục này được dành để thiết lập luật mạnh số lớn tổng quát đối với mảng các biến ngẫu nhiên theo giới hạn $\mathbf{n}\to\infty$ cho cả hai trường hợp: có và không có điều kiện hình học của không gian Banach. Phương pháp chứng minh các kết quả này chủ yếu dựa vào bất đẳng thức cực đại dạng bất đẳng thức Hájek-Rényi được trình bày trong Định lý 1.3.3 và một dạng nhiều chiều của bổ đề Kronecker được trình bày trong Bổ đề 3.1.11.

I. Fazekas và O. Klesov trong [11] đã chứng minh một bất đẳng thức cực đại dạng bất đẳng thức Hájek-Rényi và đưa ra điều kiện để một dãy các biến ngẫu nhiên tuân theo luật mạnh số lớn tổng quát. Sau đó, O. Klesov, I. Fazekas, C. Noszály và T. Tómács trong [30] đã mở rộng kết quả này cho trường hợp nhiều chiều. Họ đã đưa ra điều kiện để một mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực tuân theo luật mạnh số lớn

$$\frac{1}{b_{\mathbf{n}}}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}} \to 0 \ \text{ h.c.c. khi } \mathbf{n}\to\infty, \tag{3.2.1}$$

trong đó $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n}\in\mathbb{N}^d\}$ là một mảng có dạng tích của d dãy các số thực dương, không giảm và không bị chặn, nghĩa là $b_{\mathbf{n}} = \prod_{i=1}^d b_{n_i}^{(i)}$, trong đó $\{b_j^{(i)}, j\geqslant 1\}$ là một dãy các số thực dương, không giảm và không bị chặn với mỗi $i = 1, 2, ..., d$. Kết quả của họ được phát biểu như sau:

3.2.1 Định lý. ([30], Định lý 3.2) *Giả sử p là một số thực dương, $\{a_{\mathbf{n}}, \mathbf{n}\in\mathbb{N}^d\}$ là một mảng các số thực không âm, $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n}\in\mathbb{N}^d\}$ là một mảng có dạng tích của d dãy các số thực dương, không giảm và không bị chặn, $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n}\in\mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực thỏa mãn*

$$\mathbb{E}\Big(\max_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\Big|\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}} X_{\mathbf{l}}\Big|\Big)^p \leqslant \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} a_{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{n}\in\mathbb{N}^d.$$

Khi đó điều kiện

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d}\frac{a_{\mathbf{n}}}{b_{\mathbf{n}}^p} < \infty \tag{3.2.2}$$

kéo theo luật mạnh số lớn (3.2.1).

Nhận xét sau đây liên quan đến điều kiện của dãy $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n}\in\mathbb{N}^d\}$ được sử dụng trong Định lý 3.2.1.

3.2.2 Nhận xét. Giả sử $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n}\in\mathbb{N}^d\}$ là một mảng có dạng tích của d dãy các số thực dương, không giảm và không bị chặn. Khi đó tồn tại d dãy các số thực dương, không giảm và không bị chặn $\{b_j^{(1)}, j\geqslant 1\}$, $\{b_j^{(2)}, j\geqslant 1\}$,..., $\{b_j^{(d)}, j\geqslant 1\}$ sao cho

$$b_{\mathbf{n}} = b_{n_1}^{(1)} b_{n_2}^{(2)} ... b_{n_d}^{(d)}, \quad \mathbf{n}\in\mathbb{N}^d. \tag{3.2.3}$$

Chú ý rằng $b_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \triangle b_{\mathbf{k}}$, do đó

$$\triangle b_{\mathbf{n}} = (b_{n_1}^{(1)} - b_{n_1-1}^{(1)})(b_{n_2}^{(2)} - b_{n_2-1}^{(2)})...(b_{n_d}^{(d)} - b_{n_d-1}^{(d)}), \quad \mathbf{n}\in\mathbb{N}^d. \tag{3.2.4}$$

Những điều này đảm bảo rằng $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các số thực dương, có sai phân không âm và $b_{\mathbf{n}} \to \infty$ khi $\mathbf{n} \to \infty$.

Như vậy, nếu $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng có dạng tích của d dãy các số thực dương, không giảm và không bị chặn thì nó là một mảng các số thực dương, có sai phân không âm và $b_{\mathbf{n}} \to \infty$ khi $\mathbf{n} \to \infty$. Tuy nhiên, điều ngược lại không đúng khi $d > 1$. Ví dụ sau sẽ cho ta thấy điều này.

3.2.3 Ví dụ. Giả sử d là một số nguyên dương ($d > 1$). Với mỗi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, đặt $b_{\mathbf{n}} = |\mathbf{n}| + \min\{n_1, n_2, ..., n_d\}$. Khi đó

$$\triangle b_{\mathbf{n}} = \begin{cases} 2 & \text{nếu } \; n_1 = n_2 = ... = n_d, \\ 1 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases} \tag{3.2.5}$$

Điều đó có nghĩa rằng $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các số thực dương, có sai phân không âm và $b_{\mathbf{n}} \to \infty$ khi $\mathbf{n} \to \infty$.

Bây giờ ta sẽ chỉ ra $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ không phải là một mảng có dạng tích của d dãy các số thực. Thật vậy, giả sử tồn tại d dãy các số thực $\{b_j^{(1)}, j \geqslant 1\}$, $\{b_j^{(2)}, j \geqslant 1\}$,..., $\{b_j^{(d)}, j \geqslant 1\}$ thỏa mãn (3.2.3). Khi đó (3.2.4) đúng, do đó với mọi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$,

$$\triangle b_{\mathbf{n}} \, \triangle b_{\mathbf{n}+\mathbf{1}} = \triangle b_{n_1 n_2 \ldots n_{d-1}, n_d+1} \, \triangle b_{n_1+1, n_2+1, \ldots, n_{d-1}+1, n_d}. \tag{3.2.6}$$

Tuy nhiên, nếu chọn $\mathbf{n} = \mathbf{1}$ thì

$$\triangle b_{\mathbf{n}} \, \triangle b_{\mathbf{n}+\mathbf{1}} = 4 \neq \triangle b_{n_1 n_2 \ldots n_{d-1}, n_d+1} \, \triangle b_{n_1+1, n_2+1, \ldots, n_{d-1}+1, n_d} = 1,$$

hay (3.2.6) mâu thuẫn với (3.2.5). Do vậy $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ không phải là một mảng có dạng tích của d dãy các số thực.

Trong định lý sau đây, chúng ta tiếp tục giải quyết bài toán tìm điều kiện để một mảng các biến ngẫu nhiên tuân theo luật mạnh số lớn (3.2.1), trong đó $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các số thực dương, có sai phân không âm và $b_{\mathbf{n}} \to \infty$ khi $\mathbf{n} \to \infty$. Chú ý rằng, trong định lý này không có các giả thiết về cấu trúc của mảng các biến ngẫu nhiên và tính chất hình học của không gian Banach.

3.2.4 Định lý. *Giả sử p là một số thực dương, $\{a_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các số thực không âm, $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các số thực dương, có sai phân không âm và $b_{\mathbf{n}} \to \infty$ khi $\mathbf{n} \to \infty$, $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong một không gian Banach thực và khả ly sao cho tồn tại hằng số $C > 0$ để với mọi $\mathbf{m} \preceq \mathbf{n}$ $(\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d)$ thì*

$$\mathbb{E}\Big(\max_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \Big\| \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}} \frac{X_{\mathbf{l}}}{b_{\mathbf{l}} + b_{\mathbf{m}}} \Big\|\Big)^p \leqslant C \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \frac{a_{\mathbf{k}}}{(b_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{m}})^p}\,. \tag{3.2.7}$$

Khi đó điều kiện (3.2.2) kéo theo luật mạnh số lớn (3.2.1).

Chứng minh. Từ (3.2.7) và Định lý 1.3.3, với mọi $\varepsilon > 0$ và mọi $\mathbf{m} \preceq \mathbf{n}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\max_{\mathbf{m}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \frac{1}{b_{\mathbf{k}}}\Big\| \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}} X_{\mathbf{l}}\Big\| \geqslant \varepsilon\Big) &\leqslant \frac{C}{\varepsilon^p}\,\mathbb{E}\Big(\max_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \Big\| \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}} \frac{X_{\mathbf{l}}}{b_{\mathbf{l}} + b_{\mathbf{m}}}\Big\|\Big)^p \\ &\leqslant \frac{C}{\varepsilon^p} \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \frac{a_{\mathbf{k}}}{(b_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{m}})^p}.\end{aligned}$$

Khi đó, cho $\mathbf{n} \to \infty$, ta có

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\Big(\sup_{\mathbf{k}\succeq\mathbf{m}} \frac{1}{b_{\mathbf{k}}}\Big\| \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}} X_{\mathbf{l}}\Big\| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{C}{\varepsilon^p} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^d} \frac{a_{\mathbf{k}}}{(b_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{m}})^p} \\ &= \frac{C}{\varepsilon^p}\Big(\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{m}} \frac{a_{\mathbf{k}}}{(b_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{m}})^p} + \Big(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^d} \frac{a_{\mathbf{k}}}{(b_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{m}})^p} - \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{m}} \frac{a_{\mathbf{k}}}{(b_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{m}})^p}\Big)\Big) \\ &\leqslant \frac{C}{\varepsilon^p}\Big(\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{m}} \frac{a_{\mathbf{k}}}{b_{\mathbf{m}}^p} + \Big(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^d} \frac{a_{\mathbf{k}}}{b_{\mathbf{k}}^p} - \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{m}} \frac{a_{\mathbf{k}}}{b_{\mathbf{k}}^p}\Big)\Big).\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Mặt khác, từ (3.2.2) và Bổ đề 3.1.11 ta suy ra

$$\lim_{\mathbf{m}\to\infty} \Big(\frac{1}{b_{\mathbf{m}}^p} \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{m}} a_{\mathbf{k}}\Big) = 0, \tag{3.2.9}$$

và cũng từ (3.2.2),

$$\lim_{\mathbf{m}\to\infty} \Big(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^d} \frac{a_{\mathbf{k}}}{b_{\mathbf{k}}^p} - \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{m}} \frac{a_{\mathbf{k}}}{b_{\mathbf{k}}^p}\Big) = 0. \tag{3.2.10}$$

Kết hợp (3.2.8), (3.2.9) và (3.2.10) ta nhận được

$$\lim_{\mathbf{m}\to\infty} \mathbb{P}\Big(\sup_{\mathbf{k}\succeq\mathbf{m}} \frac{1}{b_{\mathbf{k}}} \Big\| \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}} X_{\mathbf{l}} \Big\| \geqslant \varepsilon \Big) = 0.$$

Vì vậy, kết luận (3.2.1) được suy ra từ Bổ đề 3.1.12. □

Ví dụ sau đây liên quan đến Định lý 3.2.1 và Định lý 3.2.4. Nó sẽ đưa ra một trường hợp mà luật mạnh số lớn (3.2.1) được suy ra từ Định lý 3.2.4 và không thể suy ra từ Định lý 3.2.1.

3.2.5 Ví dụ. Giả sử d là một số nguyên dương ($d > 1$), $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các số thực dương và được xác định như trong Ví dụ 3.2.3, $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên độc lập, nhận giá trị thực và có phân phối xác suất

$$\mathbb{P}(X_{\mathbf{n}} = -|\mathbf{n}|^{1/4}) = \mathbb{P}(X_{\mathbf{n}} = |\mathbf{n}|^{1/4}) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d.$$

Khi đó $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên độc lập, có kỳ vọng bằng 0 và nhận giá trị trong không gian Banach 2-khả trơn $\mathbb{R}$.

Vì $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ không phải là một mảng có dạng tích của d dãy không giảm các số thực dương nên ta không thể sử dụng Định lý 3.2.1 để thu được luật mạnh số lớn (3.2.1). Tuy nhiên, theo Ví dụ 1.2.4 thì $\{X_{\mathbf{n}}/r_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}} = \sigma(X_{\mathbf{k}}, \mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}), \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng hiệu martingale với mọi mảng các số thực dương $\{r_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$. Do đó

$$\mathbb{E}\Big(\max_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \Big| \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}} \frac{X_{\mathbf{l}}}{r_{\mathbf{l}}} \Big| \Big)^2 \leqslant C \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \frac{\mathbb{E}|X_{\mathbf{k}}|^2}{r_{\mathbf{k}}^2}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d \text{ (theo Định lý 1.3.4)}$$

hay điều kiện (3.2.7) được thỏa mãn với $p = 2$ và $a_{\mathbf{n}} = \mathbb{E}|X_{\mathbf{n}}|^2$ ($\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$). Hơn nữa

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{\mathbb{E}|X_{\mathbf{n}}|^2}{b_{\mathbf{n}}^2} \leqslant \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{|\mathbf{n}|^{1/2}}{|\mathbf{n}|^2} < \infty,$$

nên (3.2.2) đúng. Từ Định lý 3.2.4 ta nhận được luật mạnh số lớn (3.2.1).

Các kết quả tiếp theo là những trường hợp riêng của Định lý 3.2.4 khi ta bổ sung các giả thiết về cấu trúc của mảng các biến ngẫu nhiên và tính chất hình học của không gian Banach. Định lý sau đây đưa ra một đặc trưng của không gian Banach p-khả trơn dưới dạng luật mạnh số lớn tổng quát đối với mảng hiệu martingale.

3.2.6 Định lý. *Giả sử p là một số thực $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ và d là một số nguyên dương. Khi đó hai phát biểu sau là tương đương:*

(i) $\mathbf{E}$ *là một không gian Banach p-khả trơn.*

(ii) *Với mọi mảng hiệu martingale $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ nhận giá trị trong $\mathbf{E}$, mọi mảng $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ các số thực dương, có sai phân không âm và $b_{\mathbf{n}} \to \infty$ khi $\mathbf{n} \to \infty$, điều kiện*

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} \frac{\mathbb{E}\|X_{\mathbf{n}}\|^p}{b_{\mathbf{n}}^p} < \infty \tag{3.2.11}$$

kéo theo luật mạnh số lớn (3.2.1).

Chứng minh. (i) ⇒ (ii): Dễ thấy rằng nếu $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng hiệu martingale thì với mọi $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$, $\{X_{\mathbf{n}}/(b_{\mathbf{n}} + b_{\mathbf{m}}), \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ cũng là một mảng hiệu martingale. Vì vậy, kéo theo ((i) ⇒ (ii)) được suy ra từ Định lý 1.3.4 và Định lý 3.2.4.

(ii) ⇒ (i): Giả sử phát biểu (ii) đúng với một số nguyên dương d nào đó. Ta sẽ sử dụng Bổ đề 1.1.10 để chứng minh $\mathbf{E}$ là một không gian Banach p-khả trơn.

Thật vậy, giả sử $\{X_j, \mathcal{F}_j, j \geqslant 1\}$ là một hiệu martingale nhận giá trị trong $\mathbf{E}$ và thỏa mãn điều kiện (1.1.2). Với mỗi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, đặt $b_{\mathbf{n}} = n_1$. Khi đó $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các số thực dương, có sai phân không âm và $b_{\mathbf{n}} \to \infty$ khi $\mathbf{n} \to \infty$. Hơn nữa, sử dụng cách xây dựng mảng hiệu martingale xuất phát từ hiệu martingale $\{X_j, \mathcal{F}_j, j \geqslant 1\}$ như trong Ví dụ 1.2.5, ta thu được mảng hiệu martingale $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ thỏa mãn đẳng thức

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{\mathbb{E}\|X_{\mathbf{n}}\|^p}{b_{\mathbf{n}}^p} = \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\|X_{n_1}\|^p}{n_1^p}.$$

Vậy nên (1.1.2) kéo theo (3.2.11), do đó ta nhận được luật mạnh số lớn (3.2.1). Điều này cùng với đẳng thức

$$\frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} X_j = \frac{1}{b_{\mathbf{n}}}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}$$

đảm bảo rằng (1.1.3) đúng. Theo Bổ đề 1.1.10, $\mathbf{E}$ là một không gian p-khả trơn. $\square$

Trong trường hợp $d = 1$, Định lý 3.2.6 kéo theo hệ quả sau đây. Hệ quả này đã được chứng minh bởi S. Gan trong [13].

3.2.7 Hệ quả. *Giả sử p là một số thực $(1 \leqslant p \leqslant 2)$. Khi đó hai phát biểu sau là tương đương:*

(i) $\mathbf{E}$ *là một không gian Banach p-khả trơn.*

(ii) *Với mọi hiệu martingale $\{X_j, \mathcal{F}_j, j \geqslant 1\}$ nhận giá trị trong $\mathbf{E}$ và mọi dãy không giảm các số thực dương $\{b_j, j \geqslant 1\}$ thỏa mãn $b_j \to \infty$ khi $j \to \infty$, điều kiện*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\|X_j\|^p}{b_j^p} < \infty$$

kéo theo luật mạnh số lớn

$$\frac{1}{b_i}\sum_{j=1}^{i} X_j \to 0 \quad h.c.c. \ khi \quad i \to \infty.$$

Bằng việc sử dụng Bổ đề 1.1.14 và phương pháp chứng minh tương tự như đối với Định lý 3.2.6, ta nhận được định lý sau đây. Kết quả này đưa ra một đặc trưng của không gian Banach Rademacher loại p dưới dạng luật mạnh số lớn tổng quát đối với mảng các biến ngẫu nhiên độc lập và có kỳ vọng bằng 0.

3.2.8 Định lý. *Giả sử p là một số thực $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ và d là một số nguyên dương. Khi đó hai phát biểu sau là tương đương:*

(i) $\mathbf{E}$ *là một không gian Banach Rademacher loại p.*

(ii) *Với mọi mảng $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ các biến ngẫu nhiên độc lập, có kỳ vọng bằng 0 và nhận giá trị trong $\mathbf{E}$, mọi mảng $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ các số thực dương, có sai phân không âm và $b_{\mathbf{n}} \to \infty$ khi $\mathbf{n} \to \infty$, điều kiện* (3.2.11) *kéo theo luật mạnh số lớn* (3.2.1).

3.2.9 Hệ quả. *Giả sử $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d) \in \mathbb{R}^d_+$, p là một số thực $(1 \leqslant p \leqslant 2)$, $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên độc lập, nhận giá trị thực và có kỳ vọng bằng 0. Khi đó điều kiện*

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} \frac{\mathbb{E}|X_{\mathbf{n}}|^p}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p} < \infty$$

kéo theo luật mạnh số lớn

$$\frac{1}{|\mathbf{n}(\alpha)|} \sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} X_{\mathbf{k}} \to 0 \quad h.c.c. \text{ khi } \mathbf{n} \to \infty. \tag{3.2.12}$$

Chứng minh. Vì $\{b_{\mathbf{n}} = |\mathbf{n}(\alpha)|, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng có dạng tích của d dãy các số thực dương, không giảm và không bị chặn nên theo Nhận xét 3.2.2, nó là một mảng các số thực dương, có sai phân không âm và $b_{\mathbf{n}} \to \infty$ khi $\mathbf{n} \to \infty$. Mặt khác, vì $\mathbb{R}$ là một không gian Rademacher loại 2 nên nó cũng là một không gian Rademacher loại p với $1 \leqslant p < 2$. Vì vậy, Hệ quả 3.2.9 được suy ra từ Định lý 3.2.8. □

Trong trường hợp $p = 2$ và $\alpha = \mathbf{1}$, Hệ quả 3.2.9 kéo theo Định lý 2.8 của T. C. Christofides và R. J. Serfling trong [6].

3.2.10 Chú ý. Nhận xét 3.2.2 cùng với Ví dụ 3.2.3 đã chỉ ra rằng nếu $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các số thực dương thì điều kiện $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ có các sai phân không âm yếu hơn điều kiện nó là một mảng có dạng tích của d dãy không giảm các số thực dương. Tuy nhiên, Hệ quả 3.2.9

lại đề cập đến một trường hợp mà $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một dạng đặc biệt của mảng có dạng tích của d dãy không giảm các số thực dương. Việc chọn mảng $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ như trong Hệ quả 3.2.9 cũng có những hạn chế nhất định. Nhận xét 3.3.5 của mục tiếp theo sẽ cho ta thấy điều này.

3.3. Luật mạnh số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên cho trường hợp $|\mathbf{n}| \to \infty$

Mục này được dành để thiết lập luật mạnh số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên theo giới hạn $|\mathbf{n}| \to \infty$ cho cả hai trường hợp: có và không có điều kiện hình học của không gian Banach.

Định lý sau đây mở rộng luật mạnh số lớn Kolmogorov đối với mảng hiệu martingale và đưa ra hai đặc trưng của không gian Banach p-khả trơn. Ngoài ra, phát biểu (ii) của định lý còn chỉ ra được sự hội tụ theo trung bình cấp p. Phương pháp chính để chứng minh kết quả này là phương pháp dãy con (xem [4, tr. 61]).

3.3.1 Định lý. *Giả sử p là một số thực $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ và d là một số nguyên dương. Khi đó các phát biểu sau là tương đương:*

(i) **E** *là một không gian Banach p-khả trơn.*

(ii) *Với mọi $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d) \in \mathbb{R}^d_+$ và mọi mảng hiệu martingale $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ nhận giá trị trong* **E**, *điều kiện*

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{\mathbb{E}\|X_{\mathbf{n}}\|^p}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p} < \infty \tag{3.3.1}$$

kéo theo

$$\frac{\max\limits_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} \Big\| \sum\limits_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}} X_{\mathbf{l}} \Big\|}{|\mathbf{n}(\alpha)|} \to 0 \ \ \textit{h.c.c. và trong } \mathcal{L}_p \ \ \textit{khi} \ \ |\mathbf{n}| \to \infty. \tag{3.3.2}$$

(iii) *Với mọi mảng hiệu martingale $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ nhận giá trị trong* **E**, *điều kiện*

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{\mathbb{E}\|X_{\mathbf{n}}\|^p}{|\mathbf{n}|^p} < \infty \tag{3.3.3}$$

kéo theo luật mạnh số lớn

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}} \to 0 \quad h.c.c. \quad khi \quad |\mathbf{n}| \to \infty. \tag{3.3.4}$$

Chứng minh. (i) $\Rightarrow$ (ii): Với mỗi $\mathbf{k}\in\mathbb{N}^d$, đặt $S_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}} X_{\mathbf{l}}$. Khi đó, từ (3.3.1) và Định lý 1.3.4 ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^d}\mathbb{E}\left(\frac{\max\limits_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{m}\preceq\mathbf{2^k}}\Big\|\sum\limits_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{m}} X_{\mathbf{l}}\Big\|}{\prod\limits_{i=1}^{d} 2^{k_i\alpha_i}}\right)^p &\leqslant C\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^d}\frac{\sum\limits_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{2^k}}\mathbb{E}\|X_{\mathbf{l}}\|^p}{\big(\prod\limits_{i=1}^{d} 2^{k_i\alpha_i}\big)^p}\\
&\leqslant C\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{N}^d}\frac{\mathbb{E}\|X_{\mathbf{l}}\|^p}{|\mathbf{l}(\alpha)|^p} < \infty.
\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Markov thì

$$\frac{\max\limits_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{m}\preceq\mathbf{2^k}}\Big\|\sum\limits_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{m}} X_{\mathbf{l}}\Big\|}{\prod\limits_{i=1}^{d} 2^{k_i\alpha_i}} \to 0 \quad \text{h.c.c. và trong } \mathcal{L}_p \quad \text{khi} \quad |\mathbf{k}|\to\infty.$$

Với mỗi $\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d$, chọn $\mathbf{k}\in\mathbb{N}^d$ sao cho $\mathbf{n}\in\Delta^{(\mathbf{k}-\mathbf{1})}$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\frac{\max\limits_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{m}\preceq\mathbf{n}}\Big\|\sum\limits_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{m}} X_{\mathbf{l}}\Big\|}{|\mathbf{n}(\alpha)|} &\leqslant \frac{\max\limits_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{m}\preceq\mathbf{2^k}}\Big\|\sum\limits_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{m}} X_{\mathbf{l}}\Big\|}{\prod\limits_{i=1}^{d} 2^{(k_i-1)\alpha_i}}\\
&= \Big(\prod_{i=1}^{d} 2^{\alpha_i}\Big)\frac{\max\limits_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{m}\preceq\mathbf{2^k}}\Big\|\sum\limits_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{m}} X_{\mathbf{l}}\Big\|}{\prod\limits_{i=1}^{d} 2^{k_i\alpha_i}}\\
&\to 0 \quad \text{h.c.c. và trong } \mathcal{L}_p \quad \text{khi} \quad |\mathbf{k}|\to\infty.
\end{aligned}$$

Vì vậy, ta nhận được (3.3.2).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Kéo theo này là hiển nhiên.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Giả sử phát biểu (iii) đúng với một số nguyên dương d nào đó. Ta sẽ sử dụng Bổ đề 1.1.10 để chứng minh $\mathbf{E}$ là một không gian Banach p-khả trơn.

Thật vậy, giả sử $\{X_j, \mathcal{F}_j, j \geqslant 1\}$ là một hiệu martingale nhận giá trị trong $\mathbf{E}$ và thỏa mãn điều kiện (1.1.2). Sử dụng cách xây dựng mảng hiệu martingale xuất phát từ hiệu martingale $\{X_j, \mathcal{F}_j, j \geqslant 1\}$ như trong Ví dụ 1.2.5, ta thu được mảng hiệu martingale $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ thỏa mãn đẳng thức

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{\mathbb{E}\|X_{\mathbf{n}}\|^p}{|\mathbf{n}|^p} = \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\|X_{n_1}\|^p}{n_1^p}.$$

Điều này cùng với (1.1.2) đảm bảo rằng (3.3.4) đúng. Khi đó, với việc chọn $n_2 = n_3 = ... = n_d = 1$ và cho $n_1 \to \infty$, ta nhận được (1.1.3). Theo Bổ đề 1.1.10, $\mathbf{E}$ là một không gian p-khả trơn. $\square$

Định lý 3.3.1 tổng quát Định lý 4 của W. A. Woyczyński trong [64]. Trong trường hợp $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên độc lập và có kỳ vọng bằng 0, Định lý 3.3.1 kéo theo hệ quả sau đây:

3.3.2 Hệ quả. *Giả sử $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d) \in \mathbb{R}_+^d$, $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên độc lập, có kỳ vọng bằng* 0 *và nhận giá trị trong không gian Banach p-khả trơn* $(1 \leqslant p \leqslant 2)$. *Khi đó điều kiện* (3.3.1) *kéo theo* (3.3.2).

Vì đường thẳng thực $\mathbb{R}$ là một không gian Banach p-khả trơn với $1 \leqslant p \leqslant 2$ nên Hệ quả 3.3.2 kéo theo hệ quả sau đây:

3.3.3 Hệ quả. *Giả sử $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d) \in \mathbb{R}_+^d$, p là một số thực* $(1 \leqslant p \leqslant 2)$, *$\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên độc lập, nhận giá trị thực và có kỳ vọng bằng* 0. *Khi đó điều kiện*

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{\mathbb{E}|X_{\mathbf{n}}|^p}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p} < \infty$$

kéo theo luật mạnh số lớn

$$\frac{1}{|\mathbf{n}(\alpha)|}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}} \to 0 \quad h.c.c. \quad khi \quad |\mathbf{n}| \to \infty. \tag{3.3.5}$$

Ví dụ sau sẽ chỉ ra một trường hợp mà ta nhận được (3.3.5) nhờ sử dụng Hệ quả 3.3.3.

3.3.4 Ví dụ. Giả sử $p = 2$, $\alpha = \mathbf{1}$, $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên độc lập và có phân phối xác suất

$$\mathbb{P}(X_{\mathbf{n}} = -|\mathbf{n}|^{1/4}) = \mathbb{P}(X_{\mathbf{n}} = |\mathbf{n}|^{1/4}) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d.$$

Khi đó $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên độc lập, nhận giá trị thực, có kỳ vọng bằng 0 và

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{\mathbb{E}|X_{\mathbf{n}}|^p}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p} = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{|\mathbf{n}|^{1/2}}{|\mathbf{n}|^2} < \infty.$$

Do vậy, luật mạnh số lớn (3.3.5) được suy ra từ Hệ quả 3.3.3.

3.3.5 Nhận xét. Liên quan đến hai loại giới hạn $|\mathbf{n}| \to \infty$ và $\mathbf{n} \to \infty$, ta thấy rằng kết luận (3.3.5) kéo theo kết luận (3.2.12) và điều ngược lại không đúng khi $d > 1$. Điều này cùng với Ví dụ 3.3.4 đảm bảo rằng Hệ quả 3.3.3 thực sự mạnh hơn Hệ quả 3.2.9. Hơn nữa, ta khẳng định được Hệ quả 3.3.3 không chỉ tổng quát mà còn mạnh hơn Định lý 2.8 của T. C. Christofides và R. J. Serfling trong [6].

Chú ý rằng Hệ quả 3.3.3 có thể tiếp tục được mở rộng. Vấn đề này sẽ được đề cập trong Hệ quả 3.3.17 của phần tiếp theo.

Định lý sau đưa ra điều kiện để một mảng các biến ngẫu nhiên tuân theo luật mạnh số lớn. Kết quả này là một công cụ quan trọng để thiết lập luật mạnh số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên có cấu trúc ràng buộc theo khối. Tương tự như đối với Định lý 3.2.4, trong định lý này không có các giả thiết về cấu trúc của mảng các biến ngẫu nhiên và tính chất hình học của không gian Banach.

3.3.6 Định lý. *Giả sử q là một số thực ($q \geqslant 1$), $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong một không gian Banach thực và khả ly, $\Phi_1(.)$, $\Phi_2(.)$,..., $\Phi_d(.)$ là những hàm nhận giá trị dương, không giảm và không bị chặn trên tập $(0, \infty)$ thỏa mãn*

$$\sup_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^d}\left(\Big(\prod_{i=1}^d \Phi_i(2^{n_i})\Big)^{-1}\sum_{\mathbf{0}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}\Big(\prod_{i=1}^d \Phi_i(2^{k_i+1})\Big)\right) < \infty. \tag{3.3.6}$$

Khi đó điều kiện

$$\Big(\prod_{i=1}^d \Phi_i(2^{m_i+1})\Big)^{-1}\big(\psi(\mathbf{2^m})\big)^{(1-q)/q}\sum_{\mathbf{k}\in\Lambda_{\mathbf{m}}}\max_{\mathbf{l}\in\Delta_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{m})}}\Big\|\sum_{\mathbf{r}_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{m})}\preceq\mathbf{t}\preceq\mathbf{l}} X_{\mathbf{t}}\Big\| \to 0 \tag{3.3.7}$$

h.c.c. khi $|\mathbf{m}| \to \infty$ kéo theo

$$\Big(\prod_{i=1}^d \Phi_i(n_i)\Big)^{-1}\big(\psi(\mathbf{n})\big)^{(1-q)/q}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}} \to 0 \ \textit{ h.c.c. khi } |\mathbf{n}| \to \infty. \tag{3.3.8}$$

Chứng minh. Với $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$, đặt

$$\gamma_{\mathbf{m}} = \Big(\prod_{i=1}^d \Phi_i(2^{m_i+1})\Big)^{-1}\big(\psi(\mathbf{2^m})\big)^{(1-q)/q}\sum_{\mathbf{k}\in\Lambda_{\mathbf{m}}}\max_{\mathbf{l}\in\Delta_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{m})}}\Big\|\sum_{\mathbf{r}_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{m})}\preceq\mathbf{t}\preceq\mathbf{l}} X_{\mathbf{t}}\Big\|.$$

Từ (3.3.7) và Bổ đề 3.1.10 ta nhận được

$$\Big(\prod_{i=1}^d \Phi_i(2^{m_i})\Big)^{-1}\sum_{\mathbf{0}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{m}}\Big(\prod_{i=1}^d \Phi_i(2^{k_i+1})\Big)\gamma_{\mathbf{k}} \to 0 \text{ h.c.c. khi } |\mathbf{m}| \to \infty. \tag{3.3.9}$$

Với mỗi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, chọn $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$ sao cho $\mathbf{n} \in \Delta^{(\mathbf{m})}$. Khi đó

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \Big(\prod_{i=1}^d \Phi_i(n_i)\Big)^{-1}\big(\psi(\mathbf{n})\big)^{(1-q)/q}\Big\|\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}\Big\| \\
&\leqslant \Big(\prod_{i=1}^d \Phi_i(n_i)\Big)^{-1}\big(\psi(\mathbf{n})\big)^{(1-q)/q}\sum_{\mathbf{0}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{m}}\Big(\prod_{i=1}^d \Phi_i(2^{k_i+1})\Big)\big(\psi(\mathbf{2^k})\big)^{\frac{q-1}{q}}\gamma_{\mathbf{k}} \\
&\leqslant \Big(\prod_{i=1}^d \Phi_i(2^{m_i})\Big)^{-1}\sum_{\mathbf{0}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{m}}\Big(\prod_{i=1}^d \Phi_i(2^{k_i+1})\Big)\gamma_{\mathbf{k}}.
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Kết luận (3.3.8) được suy ra từ (3.3.9) và (3.3.10). □

Hệ quả sau đây là một trường hợp riêng của Định lý 3.3.6 khi $\Delta_{\mathbf{n}}$ là "khối nhị thức" ($\Delta_{\mathbf{n}} = \{\mathbf{k} : \mathbf{2^{n-1}} \preceq \mathbf{k} \prec \mathbf{2^{n}}\}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$) và điều kiện (3.3.6) được thay thế bởi hai điều kiện yếu hơn. Hai điều kiện đó được giới thiệu bởi F. Móricz, U. Stadtmüller và M. Thalmaier trong [38].

3.3.7 Hệ quả. *Giả sử $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong một không gian Banach thực và khả ly, $\Phi_1(.)$, $\Phi_2(.)$,..., $\Phi_d(.)$ là những hàm nhận giá trị dương, không giảm và không bị chặn trên tập $(0, \infty)$ thỏa mãn*

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{\Phi_i(2^{j+1})}{\Phi_i(2^j)} < \infty, \quad 1 \leqslant i \leqslant d, \tag{3.3.11}$$

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{\Phi_i(2^{j+1})}{\Phi_i(2^j)} > 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant d. \tag{3.3.12}$$

Khi đó điều kiện

$$\Big(\prod_{i=1}^{d} \Phi_i(2^{m_i+1})\Big)^{-1} \max_{\mathbf{2^m} \preceq \mathbf{k} \prec \mathbf{2^{m+1}}} \Big\| \sum_{\mathbf{2^m} \preceq \mathbf{l} \preceq \mathbf{k}} X_{\mathbf{l}} \Big\| \to 0 \text{ h.c.c. khi } |\mathbf{m}| \to \infty \tag{3.3.13}$$

kéo theo luật mạnh số lớn

$$\Big(\prod_{i=1}^{d} \Phi_i(n_i)\Big)^{-1} \sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} X_{\mathbf{k}} \to 0 \quad \text{h.c.c.} \quad \text{khi} \quad |\mathbf{n}| \to \infty. \tag{3.3.14}$$

Chứng minh. Dễ thấy rằng với việc chọn $\omega(\mathbf{n}) = \mathbf{2^{n-1}}$ ($\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$) thì ((3.3.13) ⇒ (3.3.14)) được suy ra từ ((3.3.7) ⇒ (3.3.8)). Do đó, ta chỉ cần chứng minh hai điều kiện (3.3.11) và (3.3.12) kéo theo điều kiện (3.3.6).

Thật vậy, giả sử (3.3.11) và (3.3.12) đúng. Trước hết ta sẽ chỉ ra rằng với mọi số nguyên dương i ($1 \leqslant i \leqslant d$), tồn tại một hằng số dương C sao cho

$$\Phi_i(2^{j+1}) - \Phi_i(2^j) \geqslant C\, \Phi_i(2^{j+1}), \; j \geqslant 0. \tag{3.3.15}$$

Điều này sẽ được chứng minh bằng phản chứng. Giả sử (3.3.15) không đúng. Khi đó tồn tại một số nguyên dương i_0 ($1 \leqslant i_0 \leqslant d$) sao cho với mọi $t \geqslant 1$, tồn tại một số tự nhiên j_t sao cho

$$\Phi_{i_0}(2^{j_t+1}) - \Phi_{i_0}(2^{j_t}) < \frac{1}{t}\Phi_{i_0}(2^{j_t+1}),$$

do đó

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\Phi_{i_0}(2^{j_t+1})}{\Phi_{i_0}(2^{j_t})} \leqslant 1 + \liminf_{t\to\infty}\Big(\frac{1}{t}\frac{\Phi_{i_0}(2^{j_t+1})}{\Phi_{i_0}(2^{j_t})}\Big). \tag{3.3.16}$$

Mặt khác, theo điều kiện (3.3.11) thì

$$\liminf_{t\to\infty}\Big(\frac{1}{t}\frac{\Phi_{i_0}(2^{j_t+1})}{\Phi_{i_0}(2^{j_t})}\Big) = 0. \tag{3.3.17}$$

Kết hợp (3.3.16) và (3.3.17) ta nhận được

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\Phi_{i_0}(2^{j_t+1})}{\Phi_{i_0}(2^{j_t})} \leqslant 1.$$

Điều này mâu thuẫn với (3.3.12), hay (3.3.15) đúng. Khi đó, với mọi số nguyên dương i ($1 \leqslant i \leqslant d$) và với mọi $n_i \geqslant 0$,

$$\frac{1}{\Phi_i(2^{n_i})}\sum_{j=0}^{n_i}\Phi_i(2^{j+1}) \leqslant \frac{1}{C}\frac{\Phi_i(2^{n_i+1})}{\Phi_1(2^{n_i})},$$

điều này cùng với (3.3.11) đảm bảo rằng

$$\sup_{n_i\geqslant 0}\Big(\frac{1}{\Phi_i(2^{n_i})}\sum_{j=0}^{n_i}\Phi_i(2^{j+1})\Big) < \infty.$$

Vì vậy, (3.3.6) đúng. □

Phần chứng minh trên đã khẳng định được (3.3.11) và (3.3.12) kéo theo (3.3.6). Mối quan hệ này là cơ sở cho Nhận xét 3.3.15 trong phần tiếp theo. Bây giờ ta sẽ chỉ ra (3.3.6) thực sự yếu hơn (3.3.11) và (3.3.12). Ví dụ sau đây sẽ cho ta thấy rằng từ (3.3.6) không thể suy ra được (3.3.12).

3.3.8 Ví dụ. Với mỗi $x > 0$ và $1 \leqslant i \leqslant d$, đặt

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} 2 & \text{nếu } 0 < x < 1,\\ 2^{2x^{(0)}+(-1)^{x^{(0)}}} & \text{nếu } x \geqslant 1,\end{cases}$$

trong đó $x^{(0)}$ là một số tự nhiên thỏa mãn $2^{x^{(0)}} \leqslant x < 2^{x^{(0)}+1}$. Khi đó, với mỗi $1 \leqslant i \leqslant d$, $\Phi_i(.)$ là một hàm nhận giá trị dương, không giảm và không bị chặn trên tập $(0, \infty)$ thỏa mãn

$$\frac{\Phi_i(2^1) + \Phi_i(2^2) + ... + \Phi_i(2^{j+1})}{\Phi_i(2^j)} = \frac{1}{2^{2j+(-1)^j}} \sum_{s=0}^{j} 2^{2(s+1)+(-1)^{s+1}}$$

$$\leqslant \frac{16}{4^j} \sum_{s=0}^{j} 4^s < \infty \quad (j \geqslant 0),$$

do đó điều kiện (3.3.6) được thỏa mãn. Tuy nhiên, điều kiện (3.3.12) không được thỏa mãn vì

$$\frac{\Phi_i(2^{j+1})}{\Phi_i(2^j)} = \begin{cases} 16 & \text{nếu } j \text{ là một số lẻ,} \\ 1 & \text{nếu } j \text{ là một số chẵn} \end{cases} \qquad (1 \leqslant i \leqslant d).$$

3.3.9 Nhận xét. Nếu $\Phi_1(.)$, $\Phi_2(.)$,..., $\Phi_d(.)$ là những hàm nhận giá trị dương trên tập $(0, \infty)$ thì hai điều kiện (3.3.11) và (3.3.12) được kéo theo từ hai điều kiện sau đây:

$$\sup_{j \geqslant 0} \frac{\Phi_i(2^{j+1})}{\Phi_i(2^j)} < \infty, \quad \inf_{j \geqslant 0} \frac{\Phi_i(2^{j+1})}{\Phi_i(2^j)} > 1, \qquad 1 \leqslant i \leqslant d.$$

Chú ý rằng, trong trường hợp $d = 1$, hai điều kiện trên đã được sử dụng bởi A. Rosalsky và Lê Văn Thành trong [54].

Hệ quả tiếp theo được suy ra trực tiếp từ Hệ quả 3.3.7 khi $\Phi_i(x) = x^{\alpha_i}$ $(x > 0, \alpha_i > 0,\ 1 \leqslant i \leqslant d)$. Trường hợp $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực, hệ quả này đã được chứng minh bởi Lê Văn Thành (xem [61, Định lý 2.1]).

3.3.10 Hệ quả. *Giả sử $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d) \in \mathbb{R}^d_+$, $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong một không gian Banach thực và khả ly. Khi đó điều kiện*

$$\frac{1}{\left|\mathbf{2^m}(\alpha)\right|} \max_{\mathbf{2^m} \preceq \mathbf{k} \prec \mathbf{2^{m+1}}} \Big\| \sum_{\mathbf{2^m} \preceq \mathbf{l} \preceq \mathbf{k}} X_{\mathbf{l}} \Big\| \to 0 \;\; \textit{h.c.c.} \;\; \textit{khi} \;\; |\mathbf{m}| \to \infty$$

kéo theo luật mạnh số lớn (3.3.5).

Hệ quả tiếp theo đưa ra điều kiện để một mảng hiệu martingale nhận giá trị trong không gian Banach tuân theo luật mạnh số lớn.

3.3.11 Hệ quả. *Giả sử q là một số thực ($q > 1$), $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng hiệu martingale nhận giá trị trong một không gian Banach thực và khả ly, $\Phi_1(.)$, $\Phi_2(.)$,..., $\Phi_d(.)$ là những hàm nhận giá trị dương, không giảm và không bị chặn trên tập $(0,\infty)$ thỏa mãn hai điều kiện* (3.3.11) *và* (3.3.12). *Khi đó điều kiện*

$$\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^d}\left(\Big(\prod_{i=1}^{d}\Phi_i(2^{m_i+1})\Big)^{-q}\mathbb{E}\Big\|\sum_{\mathbf{2^m}\preceq\mathbf{l}\prec\mathbf{2^{m+1}}}X_{\mathbf{l}}\Big\|^q\right)<\infty \tag{3.3.18}$$

kéo theo luật mạnh số lớn (3.3.14).

Chứng minh. Vì $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng hiệu martingale nên theo Nhận xét 3.1.2(i) thì $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \Delta^{(\mathbf{m})}\}$ cũng là một mảng hiệu martingale với mọi $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$. Khi đó, từ Nhận xét 3.1.2(iii), Hệ quả 1.3.2 và (3.3.18) ta có

$$\begin{aligned}&\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^d}\mathbb{E}\left(\Big(\prod_{i=1}^{d}\Phi_i(2^{m_i+1})\Big)^{-1}\max_{\mathbf{2^m}\preceq\mathbf{k}\prec\mathbf{2^{m+1}}}\Big\|\sum_{\mathbf{2^m}\preceq\mathbf{l}\preceq\mathbf{k}}X_{\mathbf{l}}\Big\|\right)^q\\ &\leqslant C\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^d}\left(\Big(\prod_{i=1}^{d}\Phi_i(2^{m_i+1})\Big)^{-q}\mathbb{E}\Big\|\sum_{\mathbf{2^m}\preceq\mathbf{l}\prec\mathbf{2^{m+1}}}X_{\mathbf{l}}\Big\|^q\right)<\infty.\end{aligned}$$

Điều này cùng với bất đẳng thức Markov đảm bảo rằng điều kiện (3.3.13) của Hệ quả 3.3.7 được thỏa mãn. Vì vậy, ta nhận được (3.3.14). □

Các kết quả tiếp theo là những trường hợp riêng của Định lý 3.3.6 khi ta bổ sung các giả thiết về cấu trúc của mảng các biến ngẫu nhiên và tính chất hình học của không gian Banach.

Định lý sau đây mở rộng luật mạnh số lớn Brunk-Prokhorov cho mảng hiệu martingale theo khối và nhận giá trị trong không gian Banach p-khả trơn. Trong trường hợp $p = q$, kết quả này mở rộng luật mạnh số lớn Kolmogorov cho mảng hiệu martingale theo khối.

3.3.12 Định lý. *Giả sử q là một số thực ($q \geqslant 1$), $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng hiệu martingale theo khối đối với các khối $\{\Delta_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d\}$ và nhận giá trị trong một không gian Banach p-khả trơn ($1 \leqslant p \leqslant 2$), $\Phi_1(.)$, $\Phi_2(.)$,..., $\Phi_d(.)$ là những hàm nhận giá trị dương, không giảm và không bị chặn trên tập $(0, \infty)$ thỏa mãn điều kiện (3.3.6).*

(i) *Nếu*

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \Big(\Big(\prod_{i=1}^{d} \Phi_i(n_i) \Big)^{-q} |\mathbf{n}|^{\max\{q/p;\,1\}-1}\, \mathbb{E}\|X_{\mathbf{n}}\|^q \Big) < \infty \tag{3.3.19}$$

thì (3.3.8) đúng.

(ii) *Nếu*

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \Big(\Big(\prod_{i=1}^{d} \Phi_i(n_i) \Big)^{-q} \big(\varphi(\mathbf{n})\big)^{q-1} |\mathbf{n}|^{\max\{q/p;\,1\}-1} \mathbb{E}\|X_{\mathbf{n}}\|^q \Big) < \infty \tag{3.3.20}$$

thì (3.3.14) đúng.

Chứng minh. (i) Với mỗi $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$, đặt

$$\gamma_{\mathbf{m}} = \Big(\prod_{i=1}^{d} \Phi_i(2^{m_i+1}) \Big)^{-1} \big(\psi(\mathbf{2^m})\big)^{(1-q)/q} \sum_{\mathbf{k}\in\Lambda_{\mathbf{m}}} \max_{\mathbf{l}\in\Delta_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{m})}} \Big\| \sum_{\mathbf{r}_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{m})} \preceq \mathbf{t} \preceq \mathbf{l}} X_{\mathbf{t}} \Big\|.$$

Khi đó theo bất đẳng thức Hölder, Nhận xét 3.1.2 và Định lý 1.3.4 thì

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\gamma_{\mathbf{m}}^q &= \Big(\prod_{i=1}^{d} \Phi_i(2^{m_i+1}) \Big)^{-q} \big(\psi(\mathbf{2^m})\big)^{1-q}\, \mathbb{E}\Big(\sum_{\mathbf{k}\in\Lambda_{\mathbf{m}}} \max_{\mathbf{l}\in\Delta_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{m})}} \Big\| \sum_{\mathbf{r}_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{m})} \preceq \mathbf{t} \preceq \mathbf{l}} X_{\mathbf{t}} \Big\| \Big)^q \\
&\leqslant \Big(\prod_{i=1}^{d} \Phi_i(2^{m_i+1}) \Big)^{-q} \frac{\big(\mathrm{card}(\Lambda_{\mathbf{m}})\big)^{q-1}}{\big(\psi(\mathbf{2^m})\big)^{q-1}} \sum_{\mathbf{k}\in\Lambda_{\mathbf{m}}} \mathbb{E}\Big(\max_{\mathbf{l}\in\Delta_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{m})}} \Big\| \sum_{\mathbf{r}_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{m})} \preceq \mathbf{t} \preceq \mathbf{l}} X_{\mathbf{t}} \Big\| \Big)^q \\
&\leqslant C \Big(\prod_{i=1}^{d} \Phi_i(2^{m_i+1}) \Big)^{-q} |\mathbf{2^m}|^{\max\{q/p;\,1\}-1} \sum_{\mathbf{k}\in\Lambda_{\mathbf{m}}} \sum_{\mathbf{l}\in\Delta_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{m})}} \mathbb{E}\|X_{\mathbf{l}}\|^q \\
&\leqslant C \sum_{\mathbf{2^m} \preceq \mathbf{k} \prec \mathbf{2^{m+1}}} \Big(\Big(\prod_{i=1}^{d} \Phi_i(k_i) \Big)^{-q} |\mathbf{k}|^{\max\{q/p;\,1\}-1}\, \mathbb{E}\|X_{\mathbf{k}}\|^q \Big).
\end{aligned}$$

Điều này kết hợp với (3.3.19) đảm bảo rằng $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^d}\mathbb{E}\gamma_{\mathbf{m}}^q < \infty$. Vì vậy (3.3.7) đúng, do đó từ Định lý 3.3.6 ta nhận được (3.3.8).

(ii) Với $\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^d$, đặt

$$\gamma_{\mathbf{m}} = \Big(\prod_{i=1}^d \Phi_i(2^{m_i+1})\Big)^{-1} \sum_{\mathbf{k}\in\Lambda_{\mathbf{m}}} \max_{\mathbf{l}\in\Delta_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{m})}} \Big\| \sum_{\mathbf{r}_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{m})}\preceq\mathbf{t}\preceq\mathbf{l}} X_{\mathbf{t}}\Big\|.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\gamma_{\mathbf{m}}^q &= \Big(\prod_{i=1}^d \Phi_i(2^{m_i+1})\Big)^{-q} \mathbb{E}\Big(\sum_{\mathbf{k}\in\Lambda_{\mathbf{m}}} \max_{\mathbf{l}\in\Delta_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{m})}} \Big\| \sum_{\mathbf{r}_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{m})}\preceq\mathbf{t}\preceq\mathbf{l}} X_{\mathbf{t}}\Big\|\Big)^q\\
&\leqslant \Big(\prod_{i=1}^d \Phi_i(2^{m_i+1})\Big)^{-q}\big(\mathrm{card}(\Lambda_{\mathbf{m}})\big)^{q-1} \sum_{\mathbf{k}\in\Lambda_{\mathbf{m}}} \mathbb{E}\Big(\max_{\mathbf{l}\in\Delta_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{m})}} \Big\| \sum_{\mathbf{r}_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{m})}\preceq\mathbf{t}\preceq\mathbf{l}} X_{\mathbf{t}}\Big\|\Big)^q\\
&\leqslant C \sum_{\mathbf{2^m}\preceq\mathbf{k}\prec\mathbf{2^{m+1}}} \Bigg(\Big(\prod_{i=1}^d \Phi_i(k_i)\Big)^{-q}\big(\varphi(\mathbf{k})\big)^{q-1}|\mathbf{k}|^{\max\{q/p;\,1\}-1}\mathbb{E}\|X_{\mathbf{k}}\|^q\Bigg).\end{aligned}$$

Từ (3.3.20) ta có $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^d}\mathbb{E}\gamma_{\mathbf{m}}^q < \infty$, do đó $\gamma_{\mathbf{m}}\to 0$ h.c.c. khi $|\mathbf{m}|\to\infty$. Kết luận (3.3.14) được suy ra từ Định lý 3.3.6. □

Hệ quả sau đây được suy ra trực tiếp từ Định lý 3.3.12 và là dạng nhiều chiều của Định lý 3.1(a) trong [66]. Trong trường hợp $d = 1$ và $\{X_n, n\geqslant 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, nhận giá trị thực và có kỳ vọng bằng 0, hệ quả này kéo theo luật mạnh số lớn Brunk-Prokhorov (xem H. D. Brunk [2] và Y. V. Prokhorov [41]).

3.3.13 Hệ quả. *Giả sử $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n}\in\mathbb{N}^d\}$ là một mảng hiệu martingale nhận giá trị trong một không gian Banach p-khả trơn ($1\leqslant p\leqslant 2$), q là một số thực ($q\geqslant p$). Khi đó điều kiện*

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{\mathbb{E}\|X_{\mathbf{n}}\|^q}{|\mathbf{n}|^{q+1-q/p}} < \infty$$

kéo theo luật mạnh số lớn

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}} \to 0 \quad h.c.c. \quad khi \quad |\mathbf{n}| \to \infty.$$

Hệ quả sau đây được suy ra từ Định lý 3.3.12 trong trường hợp $\mathbf{E} = \mathbb{R}$, $q = 2$ và $\Phi_i(x) = x^{\alpha_i}$ $(x > 0, \alpha_i > 0,\ 1 \leqslant i \leqslant d)$. Hệ quả này kéo theo Định lý 3.1 trong [49] khi $d = 2$, $\alpha = \mathbf{1}$, $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^2\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên độc lập theo khối và có kỳ vọng bằng 0. Ngoài ra, phát biểu (i) của hệ quả còn tổng quát Định lý 3.1 trong [50].

3.3.14 Hệ quả. *Giả sử* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d) \in \mathbb{R}^d_+$, $\{X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *là một mảng hiệu martingale theo khối đối với các khối* $\left\{\Delta_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d\right\}$ *và nhận giá trị thực.*

(i) *Nếu*

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{\mathbb{E}|X_{\mathbf{n}}|^2}{|\mathbf{n}(\alpha)|^2} < \infty$$

thì

$$\frac{1}{|\mathbf{n}(\alpha)|\left(\psi(\mathbf{n})\right)^{1/2}}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}} \to 0 \quad h.c.c. \quad khi \quad |\mathbf{n}| \to \infty.$$

(ii) *Nếu*

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{\varphi(\mathbf{n})\,\mathbb{E}|X_{\mathbf{n}}|^2}{|\mathbf{n}(\alpha)|^2} < \infty$$

thì

$$\frac{1}{|\mathbf{n}(\alpha)|}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}} \to 0 \quad h.c.c. \quad khi \quad |\mathbf{n}| \to \infty.$$

3.3.15 Nhận xét. F. Móricz, U. Stadtmüller và M. Thalmaier trong [38] đã thiết lập một bất đẳng thức cực đại đối với mảng các biến ngẫu nhiên $\mathcal{M}$-phụ thuộc (xem [38, Bổ đề 3]) và thu được điều kiện để một mảng các biến ngẫu nhiên $\mathcal{M}$-phụ thuộc theo khối đối với các "khối nhị thức" ($\Delta_{\mathbf{n}} = \{\mathbf{k} : \mathbf{2^{n-1}} \preceq \mathbf{k} \prec \mathbf{2^n}\}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$) tuân theo luật mạnh số lớn

$$\Big(\prod_{i=1}^{d} \Phi_i(n_i)\Big)^{-1} \sum_{\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}} X_{\mathbf{k}} \to 0 \ \text{ h.c.c. khi } \mathbf{n} \to \infty,$$

trong đó $\Phi_1(.)$, $\Phi_2(.)$,..., $\Phi_d(.)$ là những hàm nhận giá trị dương, tăng ngặt và không bị chặn trên tập $(0, \infty)$ thỏa mãn hai điều kiện (3.3.11) và (3.3.12) (xem [38, Định lý 1]). Mặt khác, trong phần chứng minh của Hệ quả 3.3.7 và Ví dụ 3.3.8, ta đã chỉ ra điều kiện (3.3.6) thực sự yếu hơn hai điều kiện (3.3.11) và (3.3.12). Hơn nữa, theo Nhận xét 1.1.4, nếu mảng $\{x_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} \subset \mathbb{R}$ hội tụ tới x khi $|\mathbf{n}| \to \infty$ thì nó cũng hội tụ tới x khi $\mathbf{n} \to \infty$ và $\sup_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} |x_{\mathbf{n}}| < \infty$. Từ những lập luận này cùng với phương pháp chứng minh tương tự như đối với Định lý 3.3.12, trong đó thay thế việc sử dụng Định lý 1.3.4 bởi Bổ đề 3 trong [38], ta có thể mở rộng Định lý 1 trong [38] cho trường hợp mảng $\mathcal{M}$-phụ thuộc theo khối đối với các khối tổng quát và theo giới hạn $|\mathbf{n}| \to \infty$.

Định lý tiếp theo mở rộng luật mạnh số lớn Brunk-Prokhorov cho mảng các biến ngẫu nhiên độc lập theo khối và nhận giá trị trong không gian Banach Rademacher loại p. Phương pháp chứng minh kết quả này là hoàn toàn tương tự như đối với Định lý 3.3.12, trong đó thay thế việc sử dụng Định lý 1.3.4 bởi Định lý 1.3.6. Kết quả này mở rộng Định lý 3.1 trong [54] và Định lý 3.1(a) trong [65].

3.3.16 Định lý. *Giả sử q là một số thực ($q \geqslant 1$), $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên có kỳ vọng bằng 0, độc lập theo khối đối với các khối $\{\Delta_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d\}$ và nhận giá trị trong một không gian Banach Rademacher loại p ($1 \leqslant p \leqslant 2$), $\Phi_1(.)$, $\Phi_2(.)$,..., $\Phi_d(.)$ là những hàm nhận giá trị dương, không giảm và không bị chặn trên tập $(0, \infty)$ thỏa mãn điều kiện* (3.3.6). *Khi đó hai phát biểu* (i) *và* (ii) *trong Định lý 3.3.12 đúng.*

Vì đường thẳng thực $\mathbb{R}$ là một không gian Rademacher loại p với $1 \leqslant p \leqslant 2$ nên Định lý 3.3.16 kéo theo hệ quả sau đây:

3.3.17 Hệ quả. *Giả sử* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d) \in \mathbb{R}_+^d$, *$p$ là một số thực* $(1 \leqslant p \leqslant 2)$, $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *là một mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực, có kỳ vọng bằng* 0 *và độc lập theo khối đối với các khối* $\left\{\Delta_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d\right\}$. *Khi đó điều kiện*

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{\big(\varphi(\mathbf{n})\big)^{p-1}\, \mathbb{E}|X_{\mathbf{n}}|^p}{|\mathbf{n}(\alpha)|^p} < \infty$$

kéo theo luật mạnh số lớn

$$\frac{1}{|\mathbf{n}(\alpha)|} \sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}} \to 0 \quad h.c.c. \quad khi \quad |\mathbf{n}| \to \infty.$$

Luật số lớn dạng luật số lớn Rademacher-Menshov đối với mảng các biến ngẫu nhiên tựa trực giao đã được thiết lập bởi F. Móricz trong [37]. Sau đó, dạng luật số lớn này đã được tiếp tục nghiên cứu bởi F. Móricz, K. L. Su và R. L. Taylor trong [39], A. Rosalsky và Lê Văn Thành trong [53] cho mảng các biến ngẫu nhiên p-trực giao nhận giá trị trong không gian Rademacher loại p, và bởi A. Rosalsky và Lê Văn Thành trong [54] cho dãy các biến ngẫu nhiên p-trực giao theo khối.

Định lý sau đây thiết lập luật số lớn dạng luật số lớn Rademacher-Menshov đối với mảng các biến ngẫu nhiên p-trực giao theo khối và nhận giá trị trong không gian Banach Rademacher loại p. Kết quả này mở rộng Định lý 3.1 trong [39] và Định lý 3.3 trong [54].

3.3.18 Định lý. *Giả sử* $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *là một mảng các biến ngẫu nhiên p-trực giao theo khối đối với các khối* $\left\{\Delta_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d\right\}$ *và nhận giá trị trong một không gian Banach Rademacher loại p* $(1 \leqslant p \leqslant 2)$, $\Phi_1(.)$, $\Phi_2(.)$,..., $\Phi_d(.)$ *là những hàm nhận giá trị dương, không giảm và không bị chặn trên tập* $(0, \infty)$ *thỏa mãn điều kiện* (3.3.6).

(i) *Nếu*

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d}\left(\Big(\prod_{i=1}^{d}\Phi_i(n_i)\Big)^{-p}\prod_{i=1}^{d}(\log_2 n_i)^p\,\mathbb{E}\|X_{\mathbf{n}}\|^p\right)<\infty \tag{3.3.21}$$

thì

$$\Big(\prod_{i=1}^{d}\Phi_i(n_i)\Big)^{-1}\big(\psi(\mathbf{n})\big)^{(1-p)/p}\sum_{\mathbf{1}\preceq\mathbf{k}\preceq\mathbf{n}}X_{\mathbf{k}}\to 0 \quad \textit{h.c.c. khi } |\mathbf{n}|\to\infty. \tag{3.3.22}$$

(ii) *Nếu*

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d}\left(\Big(\prod_{i=1}^{d}\Phi_i(n_i)\Big)^{-p}\big(\varphi(\mathbf{n})\big)^{p-1}\prod_{i=1}^{d}(\log_2 n_i)^p\,\mathbb{E}\|X_{\mathbf{n}}\|^p\right)<\infty$$

thì (3.3.14) *đúng.*

Chứng minh. Vì phương pháp chứng minh (i) và (ii) là giống nhau nên ta chỉ chứng minh (i).

Với mỗi $\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^d$, đặt

$$\gamma_{\mathbf{m}}=\Big(\prod_{i=1}^{d}\Phi_i(2^{m_i+1})\Big)^{-1}\big(\psi(\mathbf{2^m})\big)^{(1-p)/p}\sum_{\mathbf{k}\in\Lambda_{\mathbf{m}}}\max_{\mathbf{l}\in\Delta_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{m})}}\Big\|\sum_{\mathbf{r}_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{m})}\preceq\mathbf{t}\preceq\mathbf{l}}X_{\mathbf{t}}\Big\|.$$

Theo bất đẳng thức Hölder, Nhận xét 3.1.7 và Bổ đề 3.1.9 thì

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\gamma_{\mathbf{m}}^p &\leqslant \Big(\prod_{i=1}^{d}\Phi_i(2^{m_i+1})\Big)^{-p}\frac{\big(\mathrm{card}(\Lambda_{\mathbf{m}})\big)^{p-1}}{\big(\psi(\mathbf{2^m})\big)^{p-1}}\sum_{\mathbf{k}\in\Lambda_{\mathbf{m}}}\mathbb{E}\Big(\max_{\mathbf{l}\in\Delta_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{m})}}\Big\|\sum_{\mathbf{r}_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{m})}\preceq\mathbf{t}\preceq\mathbf{l}}X_{\mathbf{t}}\Big\|\Big)^p\\
&\leqslant C\Big(\prod_{i=1}^{d}\Phi_i(2^{m_i+1})\Big)^{-p}\sum_{\mathbf{k}\in\Lambda_{\mathbf{m}}}\left(\prod_{i=1}^{d}(\log_2 2^{m_i})^p\sum_{\mathbf{l}\in\Delta_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{m})}}\mathbb{E}\|X_{\mathbf{l}}\|^p\right)\\
&\leqslant C\sum_{\mathbf{2^m}\preceq\mathbf{k}\prec\mathbf{2^{m+1}}}\left(\Big(\prod_{i=1}^{d}\Phi_i(k_i)\Big)^{-p}\prod_{i=1}^{d}(\log_2 k_i)^p\,\mathbb{E}\|X_{\mathbf{k}}\|^p\right).
\end{aligned}$$

Từ (3.3.21) ta có $\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^d}\mathbb{E}\gamma_{\mathbf{m}}^p<\infty$, do đó $\gamma_{\mathbf{m}}\to 0$ h.c.c. khi $\mathbf{m}\to\infty$. Kết luận (3.3.22) được suy ra từ Định lý 3.3.6. $\square$

3.4. Kết luận của Chương 3

Trong chương này, luận án đã giải quyết được những vấn đề sau:

- Đưa ra hai điều kiện để một mảng các biến ngẫu nhiên bất kỳ, nhận giá trị trong một không gian Banach tùy ý tuân theo luật mạnh số lớn cho hai trường hợp $\mathbf{n} \to \infty$ và $|\mathbf{n}| \to \infty$;

- Đưa ra một số đặc trưng của không gian Banach p-khả trơn và không gian Banach Rademacher loại p dưới dạng luật mạnh số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên;

- Thiết lập một số luật mạnh số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên có cấu trúc ràng buộc theo khối.

KẾT LUẬN CHUNG VÀ KIẾN NGHỊ

1. Kết luận chung

Luận án đã thu được các kết quả chính sau đây:

- Thiết lập bất đẳng thức cực đại dạng bất đẳng thức Doob đối với mảng hiệu martingale và bất đẳng thức cực đại dạng bất đẳng thức Hájek-Rényi đối với mảng các biến ngẫu nhiên bất kỳ, nhận giá trị trong không gian Banach;

- Thiết lập tiêu chuẩn hội tụ suy biến và luật yếu số lớn Kolmogorov-Feller đối với mảng phù hợp và mảng phù hợp theo hàng, nhận giá trị trong không gian Banach p-khả trơn;

- Đưa ra các đặc trưng của không gian Banach p-khả trơn và không gian Banach Rademacher loại p dưới dạng bất đẳng thức moment và luật mạnh số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên;

- Đưa ra các điều kiện để một mảng các biến ngẫu nhiên bất kỳ, nhận giá trị trong một không gian Banach tùy ý tuân theo luật mạnh số lớn cho hai trường hợp $\mathbf{n} \to \infty$ và $|\mathbf{n}| \to \infty$;

- Thiết lập luật mạnh số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên có cấu trúc ràng buộc theo khối.

2. Kiến nghị về những hướng nghiên cứu tiếp theo

Trong thời gian tới, chúng tôi dự định nghiên cứu các vấn đề sau đây:

- Luật số lớn đối với mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị tập hoặc mảng các biến ngẫu nhiên nhận giá trị mờ;

- Định lý giới hạn trung tâm đối với dãy và mảng các biến ngẫu nhiên.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH
LIÊN QUAN TRỰC TIẾP ĐẾN LUẬN ÁN

1. Quang N. V. and Huan N. V. (2008), "On the weak law of large numbers for double arrays of Banach space valued random elements", *Journal of Probability and Statistical Science*, **6**(2), 125-134.

2. Quang N. V. and Huan N. V. (2009), "On the strong law of large numbers and $\mathcal{L}_p$-convergence for double arrays of random elements in p-uniformly smooth Banach spaces", *Statistics and Probability Letters*, **79**(18), 1891-1899.

3. Quang N. V. and Huan N. V. (2010), "A characterization of p-uniformly smooth Banach spaces and weak laws of large numbers for d-dimensional adapted arrays", *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics*, **72-A**(2), 344-358.

4. Huan N. V., Quang N. V. and Volodin A. (2010), "Strong laws for blockwise martingale difference arrays in Banach spaces", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **31**(4), 326-335.

5. Quang N. V. and Huan N. V. (2010), "A Hájek-Rényi-type maximal inequality and strong laws of large numbers for multidimensional arrays", *Journal of Inequalities and Applications*, Art. ID 569759, 14 pp.

6. Huan N. V. and Quang N. V., "The Doob inequality and strong law of large numbers for multidimensional arrays in general Banach spaces", *Kybernetika* (accepted).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

[1] Nguyễn Duy Tiến và Vũ Viết Yên (2003), *Lý thuyết xác suất*, Nhà xuất bản Giáo dục.

Tiếng nước ngoài

[2] Brunk H. D. (1948), "The strong law of large numbers", *Duke Math. J.*, **15**, 181-195.

[3] Castaing C., Quang N. V. and Thuan N. T. (2012), "A new family of compact convex valued random variables in Banach space and applications to laws of large numbers", Statist. Probab. Lett., **82**(1), 84-95.

[4] Chandra T. K. and Ghosal S. (1998), "Some elementary strong laws of large numbers: a review", *Frontiers in probability and statistics*, 61-81.

[5] Chow Y. S. and Teicher H. (1997), *Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales*, third edition. Springer-Verlag, New York.

[6] Christofides T. C. and Serfling R. J. (1990), "Maximal inequalities for multidimensionally indexed submartingale arrays", *Ann. Probability*, **18**(2), 630-641.

[7] Czerebak-Mrozowicz E. B., Klesov O. I. and Rychlik Z. (2002), "Marcinkiewicz-type strong law of large numbers for pairwise independent random fields", *Probab. Math. Statist.*, **22**(1), 127-139.

[8] Davis W. J. and Lindenstrauss J. (1976), "The l_1^n problem and degrees of non-reflexivity II", *Studia Math.*, **58**(2), 179-196.

[9] Donahue M. J., Gurvits L., Darken C. and Sontag E. (1997), "Rates of convex approximation in non-Hilbert spaces", *Constr. Approx.*, **13**(2), 187-220.

[10] Edgar G. A. and Sucheston L. (1992), *Stopping times and directed processes. Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, **47**, Cambridge University Press, Cambridge.

[11] Fazekas I. and Klesov O. (2002), "A general approach to the strong laws of large numbers", *Theory Probab. Appl.*, **45**(3), 436-449.

[12] Fazekas I. and Tómács T. (1998), "Strong laws of large numbers for pairwise independent random variables with multidimensional indices", *Publ. Math. Debrecen*, **53**(1-2), 149-161.

[13] Gan S. (1997), "The Hájek-Rényi inequality for Banach space valued martingales and the p smoothness of Banach spaces", *Statist. Probab. Lett.*, **32**(3), 245-248.

[14] Gan S. and Qiu D. (2007), "On the Hájek-Rényi inequality", *Wuhan Univ. J. Nat. Sci.*, **12**(6), 971-974.

[15] Gut A. (1978), "Marcinkiewicz laws and convergence rates in the law of large numbers for random variables with multidimensional indices", *Ann. Probability*, **6**(3), 469-482.

[16] Gut A. (2004), "An extension of the Kolmogorov-Feller weak law of large numbers with an application to the St. Petersburg game", *J. Theoret. Probab.*, **17**(3), 769-779.

[17] Gut A. (2005), *Probability: a graduate course*, Springer, New York.

[18] Gut A. and Stadtmüller U. (2009), "An asymmetric Marcinkiewicz-Zygmund LLN for random fields", *Statist. Probab. Lett.*, **79**(8), 1016-1020.

[19] Hald A. (2007), *A history of parametric statistical inference from Bernoulli to Fisher*, Springer, New York.

[20] Hall P. and Heyde C. C. (1980), *Martingale limit theory and its application,* Probability and Mathematical Statistics, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London.

[21] Hájek J. and Rényi A. (1955), "Generalization of an inequality of Kolmogorov", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **6**, 281-283.

[22] Hoffmann-Jørgensen J. and Pisier G. (1976), "The law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces", *Ann. Probability*, **4**(4), 587-599.

[23] Hoffmann-Jørgensen J., Su K. L. and Taylor R. L. (1997), "The law of large numbers and the Ito-Nisio theorem for vector valued random fields", *J. Theoret. Probab.*, **10**(1), 145-183.

[24] Hong D. H. and Hwang S. Y. (1999), "Marcinkiewicz-type strong law of large numbers for double arrays of pairwise independent random variables", *Int. J. Math. Math. Sci.*, **22**(1), 171-177.

[25] Hong D. H., Ordóñez Cabrera M., Sung S. H. and Volodin A. (1999), "Again on the weak law in martingale type p Banach spaces", *Extracta Math.*, **14**(1), 45-50.

[26] Hong D. H. and Volodin A. (1999), "Marcinkiewicz-type law of large numbers for double arrays", *J. Korean Math. Soc.*, **36**(6), 1133-1143.

[27] Howell J. O. and Taylor R. L. (1981), "Marcinkiewicz-Zygmund weak laws of large numbers for unconditional random elements in Banach spaces", *Probability in Banach spaces III*, Lecture Notes in Math., Vol. **860**, Springer, Berlin-New York, pp. 219-230.

[28] Huan N. V. and Quang N. V., "The Doob inequality and strong law of large numbers for multidimensional arrays in general Banach spaces", *Kybernetika* (accepted).

[29] Huan N. V., Quang N. V. and Volodin A. (2010), "Strong laws for blockwise martingale difference arrays in Banach spaces", *Lobachevskii J. Math.*, **31**(4), 326-335.

[30] Klesov O., Fazekas I., Noszály C. and Tómács T. (1999), "Strong laws of large numbers for sequences and fields", *Theory Stoch. Process.*, **5**(3-4), 91-104.

[31] Kolmogorov A. N. (1928), "Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Größen", *Math. Ann.*, **99**(1), 309-319.

[32] Kuczmaszewska A. (2004), "On Chung-Teicher type strong law for arrays of vector-valued random variables", *Int. J. Math. Math. Sci.*, **9-12**, 443-458.

[33] Lagodowski Z. A. (2009), "Strong laws of large numbers for **B**-valued random fields", *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, Art. ID 485412, 12 pp.

[34] Ledoux M. and Talagrand M. (1991), *Probability in Banach spaces. Isoperimetry and processes. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*, Springer-Verlag, Berlin.

[35] Lindenstrauss J. (1963), "On the modulus of smoothness and divergent series in Banach spaces", *Michigan Math. J.*, **10**, 241-252.

[36] Loève M. (1977), *Probability theory I*, Fourth edition, Springer-Verlag, New York-Heidelberg.

[37] Móricz F. (1989), "Strong limit theorems for quasi-orthogonal random fields", *J. Multivariate Anal.*, **30**(2), 255-278.

[38] Móricz F., Stadtmüller U. and Thalmaier M. (2008), "Strong laws for blockwise $\mathcal{M}$-dependent random fields", *J. Theoret. Probab.*, **21**(3), 660-671.

[39] Móricz F., Su K. L. and Taylor R. L. (1994), "Strong laws of large numbers for arrays of orthogonal random elements in Banach spaces", *Acta Math. Hungar.*, **65**(1), 1-16.

[40] Pisier G. (1986), "Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces", *Probability and analysis*, Lecture Notes in Math., Vol. **1206**, Springer, Berlin, pp. 167-241.

[41] Prokhorov Y. V. (1950), "On the strong law of large numbers", *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, **14**, 523-536.

[42] Prokhorov Y. V. (1993), "Strong law of large numbers", *Encyclopaedia of mathematics*, Vol. **9**, (Translation edited by M. Hazewinkel), Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, pp. 34-36.

[43] Quang N. V. and Huan N. V. (2008), "On the weak law of large numbers for double arrays of Banach space valued random elements", *J. Probab. Stat. Sci.*, **6**(2), 125-134.

[44] Quang N. V. and Huan N. V. (2009), "On the strong law of large numbers and $\mathcal{L}_p$-convergence for double arrays of random elements in p-uniformly smooth Banach spaces", *Statist. Probab. Lett.*, **79**(18), 1891-1899.

[45] Quang N. V. and Huan N. V. (2010), "A characterization of p-uniformly smooth Banach spaces and weak laws of large numbers for d-dimensional adapted arrays", *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics*, **72-A**(2), 344-358.

[46] Quang N. V. and Huan N. V. (2010), "A Hájek-Rényi-type maximal inequality and strong laws of large numbers for multidimensional arrays", *J. Inequal. Appl.*, Art. ID 569759, 14 pp.

[47] Quang N. V. and Huy N. N. (2008), "Weak law of large numbers for adapted double arrays of random variables", *J. Korean Math. Soc.*, **45**(3), 795-805.

[48] Quang N. V. and Son L. H. (2006), "On the weak law of large numbers for sequences of Banach space valued random elements", *Bull. Korean Math. Soc.*, **43**(3), 551-558.

[49] Quang N. V. and Thanh L. V. (2005), "On the strong laws of large numbers for two-dimensional arrays of blockwise independent and blockwise orthogonal random variables", *Probab. Math. Statist.*, **25**(2), 385-391.

[50] Quang N. V. and Thanh L. V. (2006), "Marcinkiewicz-Zygmund law of large numbers for blockwise adapted sequences", *Bull. Korean Math. Soc.*, **43**(1), 213-223.

[51] Rosalsky A. and Sreehari M. (2001), "A weak law with random indices for randomly weighted sums of random elements in martingale type p Banach spaces", *Nonlinear Anal.*, **47**(2), 1257-1270.

[52] Rosalsky A. and Thanh L. V. (2006), "Strong and weak laws of large numbers for double sums of independent random elements in Rademacher type p Banach spaces", *Stoch. Anal. Appl.*, **24**(6), 1097-1117.

[53] Rosalsky A. and Thanh L. V. (2007), "On almost sure and mean convergence of normed double sums of Banach space valued random elements", *Stoch. Anal. Appl.*, **25**(4), 895-911.

[54] Rosalsky A. and Thanh L. V. (2007), "On the strong law of large numbers for sequences of blockwise independent and blockwise p-orthogonal random elements in Rademacher type p Banach spaces", *Probab. Math. Statist.*, **27**(2), 205-222.

[55] Rosalsky A. and Volodin A. (2007), "On the weak law with random indices for arrays of Banach space valued random elements", *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics*, **69**(2), 330-343.

[56] Scalora F. S. (1961), "Abstract martingale convergence theorems", *Pacific J. Math.*, **11**, 347-374.

[57] Schwartz L. (1981), *Geometry and probability in Banach spaces*, Lecture Notes in Mathematics, **852**, Springer-Verlag, Berlin-New York.

[58] Shorack G. R. and Smythe R. T. (1976), "Inequalities for max $|S_k|/b_k$ where $k \in \mathbb{N}^r$", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **54**, 331-336.

[59] Smythe R. T. (1973), "Strong laws of large numbers for r-dimensional arrays of random variables", *Ann. Probability*, **1**(1), 164-170.

[60] Su K. L. (2007), "Best possible sufficient conditions for strong law of large numbers for multi-indexed orthogonal random elements", *Int. J. Math. Math. Sci.*, Art. ID 86909, 15 pp.

[61] Thanh L. V. (2007), "On the strong law of large numbers for d-dimensional arrays of random variables", *Electron. Comm. Probab.*, **12**, 434-441.

[62] Tómács T. (2005), "Convergence rates in the law of large numbers for arrays of Banach space valued random elements", *Statist. Probab. Lett.*, **72**(1), 59-69.

[63] Woyczyński W. A. (1975), "Geometry and martingales in Banach spaces", *Probability-Winter School*, Lecture Notes in Math., Vol. **472**, Springer, Berlin, pp. 229–275.

[64] Woyczyński W. A. (1976), "Asymptotic behavior of martingales in Banach spaces", *Probability in Banach spaces*, Lecture Notes in Math., Vol. **526**, Springer, Berlin, pp. 273-284.

[65] Woyczyński W. A. (1980), "On Marcinkiewicz-Zygmund laws of large numbers in Banach spaces and related rates of convergence", *Probab. Math. Statist.*, **1**(2), 117-131.

[66] Woyczyński W. A. (1982), "Asymptotic behavior of martingales in Banach spaces II", *Martingale theory in harmonic analysis and Banach spaces*, Lecture Notes in Math., Vol. **939**, Springer, Berlin-New York, pp. 216-225.

[67] Zhang L. (1998), "Rosenthal type inequalities for B-valued strong mixing random fields and their applications", *Sci. China Ser. A*, **41**(7), 736-745.