🕮 *Chuyên đề 1:* KHẢO SÁT HÀM SỐ

✓ *Vấn đề 1:* GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1/ Một số dạng vô định thường gặp: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$; $\infty.0$.

Chú ý: Các trường hợp sau không phải là dạng vô định

- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- $\frac{a}{0} = \infty \ (a \neq 0)$
- $\frac{a}{\infty} = 0 \ (a \neq 0)$
- $a.\infty = \infty \ (a \neq 0)$

2/ Khử dạng vô định

- Hàm số có chứa căn: Nhân và chia với biểu thức liên hợp.
- Hàm số có chứa lượng giác: Biến đổi để sử dụng ba giới hạn quen thuộc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

- Dạng vô định $\frac{0}{0}$ khi $x \to a$: Phân tích tử số và mẫu số để có $(x - a)$ làm nhân tử chung.
- Dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$: Đặt số hạng bậc cao nhất của tử số và mẫu số làm thừa số chung.
- Dạng vô định $\infty - \infty$, $\infty.0$: Biến đổi đưa về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$.

B. ĐỀ THI

Bài 1:

Tìm giới hạn $I = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x-1}}{x}$.

Giải

Giới hạn I có dạng vô định $\frac{0}{0}$.

Ta có: $I = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1+1+\sqrt[3]{x-1}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}+\frac{\sqrt[3]{x-1}+1}{x}\right]$

- $I_1 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

- $I_2 = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x-1}+1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x-1}+1\right)\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{x-1}+1\right)}{x\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{x-1}+1\right)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{x-1}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{x-1}+1} = \frac{1}{3}$$

Vậy $I = I_1 + I_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$.

Bài 2: ĐỀ DỰ BỊ 1

Tìm giới hạn $I = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{3x^2-1}+\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos x}$.

Giải

Giới hạn I có dạng vô định $\frac{0}{0}$.

Ta có $I = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{3x^2-1}+1\right)+\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt[3]{3x^2-1}+1}{2\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{\sqrt{2x^2+1}-1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right]$

- $I_1 = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{3x^2-1}+1}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2-1+1}{2\sin^2\frac{x}{2}\left[\left(\sqrt[3]{3x^2-1}\right)^2-\sqrt[3]{3x^2-1}+1\right]}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{3x^2-1}\right)^2-\sqrt[3]{3x^2-1}+1}.6\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{6}{3}=2$$

- $I_2 = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}\left(\sqrt{2x^2+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2x^2+1}+1}4\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{4}{2}=2$.

Vậy $I = I_1 + I_2 = 4$.

Bài 3: ĐỀ DỰ BỊ 2

Tìm giới hạn $L = \lim_{x\to 1}\frac{x^6-6x+5}{(x-1)^2}$.

Giải

Giới hạn L có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$.

Ta có $L = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^6 - 6x + 5}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 5\right)}{(x-1)^2}$

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2\left(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5\right)}{(x-1)^2}$

$= \lim\limits_{x\to 1}\left(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5\right) = 15$.

✓ *Vấn đề 2:* TÍNH CHẤT ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1/ Định nghĩa:

Hàm số f xác định trên khoảng (đoạn hoặc nửa khoảng) K và $x_1, x_2 \in K$.

- Hàm số f gọi là đồng biến trên K nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số f gọi là nghịch biến trên K nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Định nghĩa này kết hợp với định lý dưới đây được sử dụng để chứng minh một bất đẳng thức.

2/ Định lí:

Hàm số f có đạo hàm trên khoảng K.

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số f đồng biến trên K.
- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số f nghịch biến trên K.

Định lý này thường được ứng dụng cho các dạng toán sau:

Dạng 1: *Tìm tham số để hàm số luôn đồng biến (hoặc nghịch biến).*

Thường sử dụng dấu của tam thức bậc hai $P(x) = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$

* $P(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta \leq 0\\ a > 0\end{cases}$ hay $\begin{cases}a = b = 0\\ c \geq 0\end{cases}$.

* $P(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta \leq 0\\ a < 0\end{cases}$ hay $\begin{cases}a = b = 0\\ c \leq 0\end{cases}$.

Dạng 2: *Tìm tham số để hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng (a; b).*

Hàm số $y = f(x, m)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng (a; b)

$\Leftrightarrow y' \geq 0$ (hoặc $y' \leq 0$), $\forall x \in (a; b)$ và dấu "=" xảy ra ở hữu hạn điểm (*)

Thông thường điều kiện (*) biến đổi được về một trong hai dạng:

(*) $h(m) \geq g(x), \forall x \in (a; b) \Leftrightarrow h(m) \geq \max\limits_{(a;\, b)} g(x)$

(*) $h(m) \le g(x), \forall x \in (a;\, b) \Leftrightarrow h(m) \le \min\limits_{(a;\, b)} g(x)$

(Xem Vấn đề 4: GTNN – GTLN của hàm số, để xác định $\max\limits_{(a;\, b)} g(x)$

và $\min\limits_{(a;\, b)} g(x)$)

Dạng 3: *Tìm tham số để phương trình (hệ phương trình) có nghiệm.*

Biến đổi phương trình đã cho về dạng g(x) = h(m).

Lập bảng biến thiên cho hàm số y = g(x) và dựa vào bảng biến thiên này để kết luận.

Chú ý: Nếu bài toán có đặt ẩn số phụ thì phải xác định điều kiện cho ẩn số phụ đó.

B. ĐỀ THI

Bài 1: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2009

Cho a và b là hai số thực thỏa mãn 0 < a < b < 1.

Chứng minh rằng: $a^2\ln b - b^2\ln a > \ln a - \ln b$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$(a^2 + 1)\ln b > (b^2 + 1)\ln a \Leftrightarrow \dfrac{\ln b}{b^2+1} > \dfrac{\ln a}{a^2+1}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2+1};\ 0 < x < 1$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{x^2 + 1 - 2x^2\ln x}{x(x^2+1)^2} > 0,\ \forall x \in (0;\ 1) \Rightarrow f$ đồng biến trên (0; 1)

Mặt khác 0 < a < b < 1 nên:

$f(b) > f(a) \Leftrightarrow \dfrac{\ln b}{b^2+1} > \dfrac{\ln a}{a^2+1}$ (Điều phải chứng minh).

Bài 2: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2008

Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực phân biệt: $\sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x} = m \qquad (m \in \mathbb{R})$

Giải

Xét hàm số $f(x) = \sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x}$.

- Tập xác định: D = [0; 6]
- $f'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}} + \dfrac{1}{\sqrt{2x}} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}} - \dfrac{1}{\sqrt{6-x}}$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)}}\right)^3-\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)}}\right)^3\right]+\left[\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2x}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}\right)^2\right]$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt[4]{2x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}\right]\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{2x}\sqrt[4]{6-x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^2}}\right)+\frac{1}{\sqrt[4]{2x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}\right].$$

- Vì $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{2x}\sqrt[4]{6-x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^2}}\right)+\frac{1}{\sqrt[4]{2x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}>0,\ \forall x\in(0;6)$

  Nên $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt[4]{2x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}=0\Leftrightarrow\sqrt[4]{2x}=\sqrt[4]{6-x}\Leftrightarrow x=2$

- Bảng biến thiên:

x	0		2		6
f'(x)		+	0	−	
f(x)	$2\left(\sqrt[4]{6}+\sqrt{6}\right)$	↗	$3\left(\sqrt[4]{4}+\sqrt{4}\right)$	↘	$\sqrt[4]{12}+\sqrt{12}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Phương trình f(x) = m có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt[4]{6}+\sqrt{6}\right)\ \le\ m\ <\ 3\left(\sqrt[4]{4}+\sqrt{4}\right).$$

<u>CÁCH KHÁC</u> Đặt $g(u)=\sqrt[4]{u}+\sqrt{u}$

$g'(u)=\frac{1}{4}u^{-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}$; $g''(u)=-\frac{3}{16}u^{-\frac{7}{4}}-\frac{1}{4}u^{-\frac{3}{2}}<0,\forall u\in(0;6)$

Vậy g' là 1 hàm giảm (nghiêm cách), Ta có $f(x)=g(2x)+2g(6-x)$

Suy ra $f'(x)=2g'(2x)-2g'(6-x)$

Nên) $f'(x)=0\Leftrightarrow g'(2x)=g'(6-x)\Leftrightarrow 2x=6-x$ (do g' giảm)

$\Leftrightarrow x=2$ Suy ra $f'(x)=2g'(2x)-2g'(6-x)<0\Leftrightarrow 2x>6-x\Leftrightarrow x>2$

và $f'(x)>0\Leftrightarrow g'(2x)>g'(6-x)\Leftrightarrow 2x<6-x$ (do g' giảm) $\Leftrightarrow x<2$

Bài 3: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2007

Tìm giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases}x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}=5\\ x^3+\frac{1}{x^3}+y^3+\frac{1}{y^3}=15m-10\end{cases}$$

Giải

- Đặt $x+\dfrac{1}{x}=u,\ \ y+\dfrac{1}{y}=v\ \ (\text{Đk}:|u|\ge 2,\ \ |v|\ge 2).$
- Hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases}u+v=5\\ u^3+v^3-3(u+v)=15m-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=5\\ (u+v)\left(u^2+v^2-uv\right)-3(u+v)=15m-10\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=5\\ (u+v)\left[(u+v)^2-3uv\right]-3(u+v)=15m-10\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=5\\ 5\left[(5)^2-3uv\right]-3(5)=15m-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=5\\ uv=8-m\end{cases}.$$

- Khi đó u, v (nếu có) sẽ là nghiệm của phương trình:

  $t^2-5t+8-m=0$ hay $t^2-5t+8=m$ (1).

- Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm $t=t_1,\ t=t_2$ thỏa mãn: $|t_1|\ge 2,\ \ |t_2|\ge 2$ ($t_1,\ t_2$ không nhất thiết phân biệt).

- Xét hàm số $f(t)=t^2-5t+8$ với $|t|\ge 2$:

Suy ra $f'(t)=2t-5$ và $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{5}{2}$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		-2		2		$5/2$		$+\infty$
f'(t)		$-$				$-$	0	$+$	
f(t)	$+\infty$	$\searrow$	22		2	$\searrow$	$7/4$	$\nearrow$	$+\infty$

• Từ bảng biến thiên của hàm số suy ra hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{7}{4}\le m\le 2\ \text{ hoặc } m\ge 22.$$

Bài 4: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2007

Cho $a\ge b>0$. Chứng minh rằng: $\left(2^a+\dfrac{1}{2^a}\right)^b\le\left(2^b+\dfrac{1}{2^b}\right)^a$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$(1+4^a)^b\le(1+4^b)^a\Leftrightarrow b\ln(1+4^a)\le a\ln(1+4^b)\Leftrightarrow\frac{\ln(1+4^a)}{a}\le\frac{\ln(1+4^b)}{b}$$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{\ln(1+4^x)}{x}$ với x > 0.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{\dfrac{4^x\ln 4}{1+4^x}x-\ln\left(1+4^x\right)}{x^2}=\dfrac{x.4^x\ln 4-(1+4^x)\ln(1+4^x)}{x^2(1+4^x)}$

$=\dfrac{4^x\left[\ln 4^x-\ln(1+4^x)\right]-\ln(1+4^x)}{x^2(1+4^x)}$

Nhận xét : • $4^x < 1 + 4^x \Rightarrow \ln 4^x < \ln(1+4^x)$

• $1 + 4^x > 1 \Rightarrow \ln(1+4^x) > 0$

Do đó $f'(x) < 0, \forall x > 0$

Suy ra f(x) nghịch biến trên khoảng (0; +∞).

Mặt khác $a \ge b > 0$ nên:

$f(a) \le f(b) \Leftrightarrow \dfrac{\ln(1+4^a)}{a} \le \dfrac{\ln(1+4^b)}{b}$ (Điều phải chứng minh).

Bài 5: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2007

Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực: $3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}$

Giải

- Điều kiện: $x \ge 1$.
- Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{x+1}$, phương trình đã cho tương đương với

$3\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}+m=2\dfrac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow -3\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+2\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}=m$ (1)

- Đặt $t=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$, khi đó phương trình (1) trở thành $-3t^2 + 2t = m$ (2)

Vì $t=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}=\sqrt[4]{1-\dfrac{2}{x+1}}$ và $x \ge 1$ nên $0 \le t < 1$

- Xét hàm số $f(t) = -3t^2 + 2t$, với $0 \le t < 1$

Suy ra : $f'(t) = -6t + 2$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3}$

- Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{3}$	1
f(t)	0 ↗	$\frac{1}{3}$	↘ -1

- Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t \in [0; 1) \Leftrightarrow -1 < m \le \frac{1}{3}$.

Bài 6: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2007

Chứng minh rằng với mọi giá trị dương của tham số m, phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt: $x^2 + 2x - 8 = \sqrt{m(x-2)}$

Giải

- Điều kiện: $m(x - 2) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 2$ (Do xét $m > 0$).
- Phương trình đã cho tương đương với

$$(x-2)(x+4) = \sqrt{m(x-2)} \Leftrightarrow [(x-2)(x+4)]^2 = m(x-2)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[(x-2)(x+4)^2 - m\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^3 + 6x^2 - 32 - m = 0 \end{array}\right.$$

- Nhận xét: Phương trình đã cho luôn có một nghiệm dương x = 2, nên từ yêu cầu bài toán, ta chỉ cần chứng minh phương trình: $x^3 + 6x^2 - 32 = m$ (1) có một nghiệm trong khoảng $(2; +\infty)$.
- Xét hàm số $f(x) = x^3 + 6x^2 - 32$, với $x > 2$.

  Ta có: $f'(x) = 3x^2 + 12x > 0, \ \forall x > 2$

  Bảng biến thiên:

x	2	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	0 ↗	$+\infty$

- Từ bảng biến thiên ta thấy với mọi m > 0, phương trình (1) luôn có một nghiệm trong khoảng $(2; +\infty)$.

Vậy với mọi m > 0 phương trình đã cho luôn có hai nghiệm thực phân biệt.

Bài 7:

> Xác định m để phương trình sau có nghiệm.
>
> $$m\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}+2\right)=2\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$$

Giải

- Điều kiện: $-1 \le x \le 1$.
- Đặt $t = \sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2} \ge 0 \Rightarrow t^2 = 2-2\sqrt{1-x^4} \le 2$

  Điều kiện: $0 \le t \le \sqrt{2}$
- Phương trình đã cho trở thành: $m(t + 2) = 2 - t^2 + t \Leftrightarrow m = \dfrac{-t^2+t+2}{t+2}$
- Xét hàm số $f(t) = \dfrac{-t^2+t+2}{t+2}$, với $0 \le t \le \sqrt{2}$.
- $f'(t) = \dfrac{-t^2-4t}{(t+2)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0, t = -4$
- Bảng biến thiên

t	0		$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	1	$\searrow$	$\sqrt{2}-1$

Từ bảng biến thiên của hàm số suy ra phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $\sqrt{2} - 1 \le m \le 1$.

Bài 8: ĐỀ DỰ BỊ 1

> Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+5x+m^2+6}{x+3}$ (1) (m là tham số)
>
> Tìm m để hàm số (1) đồng biến khoảng $(1; +\infty)$.

Giải

Ta có: $y' = \dfrac{x^2+6x+9-m^2}{(x+3)^2}$

- Hàm số y đồng biến trên $(1; +\infty) \Leftrightarrow y' \ge 0,\ \forall x > 1$

  $\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 - m^2 \ge 0,\ \forall x > 1 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 \ge m^2,\ \forall x > 1$.
- Xét hàm số $g(x) = x^2 + 6x + 9,\ \forall x > 1$

  $g'(x) = 2x + 6 > 0,\ \forall x > 1$

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với

$$\min_{x \geq 1} g(x) \geq m^2 \Leftrightarrow g(1) = 16 \geq m^2 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 4.$$

Bài 9:

Chứng minh rằng: $e^x + \cos x \geq 2 + x - \dfrac{x^2}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Giải

Ta chứng minh hai bất đẳng thức sau:

1/ $e^x \geq 1 + x, \forall x \in \mathbb{R}$

2/ $\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R}$

- Chứng minh $e^x \geq 1 + x, \forall x \in \mathbb{R}$

  Xét hàm số $f(x) = e^x - x - 1 \Rightarrow f'(x) = e^x - 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

  Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

  Dựa vào bảng biến thiên ta thấy

  $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbb{R} \qquad (1)$

- Chứng minh: $\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$

  Xét hàm số $g(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$

  Vì $g(x)$ là hàm số chẵn nên ta chỉ cần xét $x \geq 0$ là đủ.

- $g'(x) = -\sin x + x$
- $g''(x) = -\cos x + 1 \geq 0$

  $\Rightarrow g'(x)$ đồng biến, $\forall x \geq 0 \Rightarrow g'(x) \geq g'(0) = 0, \ \forall x \geq 0$

  $\Rightarrow g(x)$ đồng biến, $\forall x \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq 0, \ \forall x \geq 0$

  $\Rightarrow \cos x + \dfrac{x^2}{2} - 1 \geq 0, \forall x \geq 0 \Rightarrow \cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}; \ \forall x \in \mathbb{R} \quad (2)$

  Từ (1) và (2) suy ra $e^x + \cos x \geq 2 + x - \dfrac{x^2}{2}; \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 10: ĐỀ DỰ BỊ 2

Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + m}{x - 2}$ (1) (m là tham số)

Xác định m để hàm số (1) nghịch biến trên đoạn [−1; 0].

- $y' = \dfrac{x^2 - 4x + 4 - m}{(x-2)^2}$
- Hàm số nghịch biến trên đoạn [−1; 0] $\Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in [-1; 0]$

  $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - m \le 0, \forall x \in [-1; 0] \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \le m, \forall x \in [-1; 0]$
- Xét hàm số $g(x) = x^2 - 4x + 4, \forall x \in [-1; 0]$; $g'(x) = 2x - 4$

  Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$			9	$\searrow$	4				

- Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m \ge \underset{[-1;\,0]}{\text{Max}}\, f(x) \Leftrightarrow m \ge 9$

Bài 11: CAO ĐẲNG GTVT III

Tìm giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng 2 nghiệm dương:

$$\sqrt{x^2 - 4x + 5} = m + 4x - x^2$$

Giải

- Đặt $t = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$, ta có $t' = \dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$ và t' = 0 ⇔ x = 2.

x	0		2		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$	
t	$\sqrt{5}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- Từ bảng biến thiên suy ra:

  + Điều kiện cho ẩn phụ là: $t \ge 1$.

  + Ứng với một giá trị $t \in \left(1; \sqrt{5}\right)$ thì cho hai giá trị x dương.

  + Ứng với một giá trị $t \in \left[\sqrt{5}; +\infty\right)$ thì cho một giá trị x dương.
- Phương trình đã cho trở thành: $m = t^2 + t - 5$ (1).
- Xét hàm số $f(t) = t^2 + t - 5$ $(t \ge 1)$ thì $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall\, t \ge 1$.

t	1		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$		$+$	
$f(t)$	-3	$\nearrow$	$\sqrt{5}$	$\nearrow$	$+\infty$

Nhận xét rằng phương trình (1) có nhiều nhất 1 nghiệm $t \geq 1$.

Vậy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm $x > 0$ khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 1 nghiệm $t \in \left(1;\ \sqrt{5}\right) \Leftrightarrow -3 < m < \sqrt{5}$.

Bài 12: CAO ĐẲNG KINH TẾ ĐỐI NGOẠI

> Xác định m để phương trình sau có nghiệm thực: $2\sqrt{x+1} = x + m$

Giải

- Đặt $t = \sqrt{x+1}$. Điều kiện $t \geq 0$
- Phương trình đã cho trở thành : $2t = t^2 - 1 + m \Leftrightarrow m = -t^2 + 2t + 1$
- Xét hàm số $y = -t^2 + 2t + 1$, $t \geq 0$. Ta có $y' = -2t + 2$ và $y' = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

t	0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

- Từ bảng biến thiên của hàm số suy ra phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq 2$.

✓ *Vấn đề 3:* CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

A. TỔNG QUÁT

1. Hàm số f có cực trị $\Leftrightarrow$ y' đổi dấu.

2. Hàm số f không có cực trị $\Leftrightarrow$ y' không đổi dấu.

3. Hàm số f chỉ có một cực trị $\Leftrightarrow$ y' đổi dấu 1 lần.

4. Hàm số f có 2 cực trị (cực đại và cực tiểu) $\Leftrightarrow$ y' đổi dấu 2 lần.

5. Hàm số f có 3 cực trị $\Leftrightarrow$ y' đổi dấu 3 lần.

6. Hàm số f đạt cực đại tại x_0 nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$

7. Hàm số f đạt cực tiểu tại x_0 nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$

8. Hàm số f có đạo hàm và đạt cực trị tại $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

9. Hàm số f có đạo hàm và đạt cực trị bằng c tại x = $x_0 \Rightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f(x_0) = c \end{cases}$

Chú ý : Đối với một hàm số bất kì, hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm mà tại đó đạo hàm triệt tiêu hoặc đạo hàm không xác định.

B. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ BẬC 3

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

1. Đồ thị có 2 điểm cực trị nằm cùng một phía đối với Ox

$\Leftrightarrow$ Hàm số có hai giá trị cực trị cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta y' > 0 \\ y_{CĐ}.y_{CT} > 0 \end{cases}$

2. Đồ thị có 2 điểm cực trị nằm 2 phía đối với Ox

$\Leftrightarrow$ Hàm số có hai giá trị cực trị trái dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta y' > 0 \\ y_{CĐ}.y_{CT} < 0 \end{cases}$

3. Cho đường thẳng d: Ax + By + C = 0

Gọi $M_1(x_1; y_1)$ và $M_2(x_2; y_2)$ là điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị.

Khoảng cách đại số từ M_1 và M_2 đến đường thẳng d là :

$$t_1 = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad t_2 = \frac{Ax_2 + By_2 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- Đồ thị có 2 điểm cực đại, cực tiểu ở hai phía của d

  $\Leftrightarrow \begin{cases} y' = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \\ t_1.t_2 < 0 \end{cases}$

- Đồ thị có 2 điểm cực trị cùng phía đối với một đường thẳng d

  $\Leftrightarrow \begin{cases} y' = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \\ t_1.t_2 > 0 \end{cases}$

4. Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa hệ thức $F(x_1, x_2) = 0$ (1)

- Điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu là:

  y' = 0 có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta y' > 0 \end{cases} \Rightarrow$ điều kiện của m

- x_1 và x_2 thỏa hệ thức (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \\ \text{Hệ thức (1)} \end{cases}$
- Giải hệ suy ra m. So với điều kiện nhận hay loại giá trị của m.

5. Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba

Lấy y chia cho y' giả sử ta được: y = (ux + v).y' + mx + n (*)

Gọi $A(x_0; y_0)$ là cực trị của đồ thị thì $y'(x_0) = 0$ và tọa độ điểm A thỏa phương trình (*): $y_0 = (ux_0 + v).y'(x_0) + mx_0 + n \Leftrightarrow y_0 = mx_0 + n$.

Do đó đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị có phương trình y = mx + n

C. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ BẬC 4 TRÙNG PHƯƠNG

$y = ax^4 + bx^2 + c$

$y' = 4ax^3 + 2bx$

$y' = 0 \Leftrightarrow 2x(2ax^2 + b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \\ 2ax^2 + b = 0 & (1) \end{array}\right.$

- Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow$ a.b < 0.
- Hàm số có đúng một cực trị

$\Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép hoặc có nghiệm bằng 0

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \text{ và } b \neq 0 \\ a \neq 0 \text{ và } ab \geq 0 \end{array}\right.$

Chú ý : Nếu đồ thị của hàm số bậc 4 trùng phương có 3 cực trị thì 3 cực trị này luôn tạo thành một tam giác cân tại đỉnh nằm trên trục tung.

D. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ HỮU TỈ $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{b'x + c'}$

$y' = \dfrac{ab'x^2 + 2ac'x + bc' - cb'}{(b'x + c')^2}$,

$y' = 0 \Leftrightarrow g(x) = ab'x^2 + 2ac'x + bc' - cb' = 0 \quad (b'x + c' \neq 0)$

1. Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow$ y' = 0 có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} ab' \neq 0 \\ \Delta g > 0 \end{cases}$

(Khi g(x) = 0 có 2 nghiệm phân biệt thì hiển nhiên 2 nghiệm đó thỏa $b'x + c' \neq 0$)

2. Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow$ y' = 0 vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

3. Đồ thị có 2 điểm cực trị ở cùng một phía đối với Ox

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab' \neq 0 \\ \Delta g > 0 \\ y_{CĐ} \cdot y_{CT} > 0 \end{cases} \quad \left(\text{hoặc } \begin{cases} ab' \neq 0 \\ \Delta g > 0 \\ y = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt} \end{cases} \right)$$

4. Đồ thị có 2 điểm cực trị nằm về hai phía đối với Ox

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab' \neq 0 \\ \Delta g > 0 \\ y_{CĐ} \cdot y_{CT} < 0 \end{cases} \quad \left(\text{hoặc } \begin{cases} ab' \neq 0 \\ y = 0 \text{ vô nghiệm} \end{cases} \right)$$

5. Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số hữu tỉ

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b} = \frac{u(x)}{v(x)} \ (*) \ \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Gọi $A(x_0; y_0)$ là cực trị của đồ thị thì

- Tọa độ điểm A thỏa phương trình (*): $y_0 = \dfrac{u(x_0)}{v(x_0)}$
- $y'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{u'(x_0)v(x_0) - v'(x_0)u(x_0)}{v^2(x_0)} = 0$

$$\Leftrightarrow u'(x_0)v(x_0) = v'(x_0)u(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)} \Leftrightarrow y_0 = \frac{2ax_0 + b}{a'}$$

Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị có phương trình $y = \dfrac{2ax + b}{a'}$.

B. ĐỀ THI

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2011

Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ (1), m là tham số.

Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho OA = BC, O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

Giải

Ta có: $y' = 4x^3 - 4(m + 1)x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x^2 = m + 1$.

- Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình y' = 0 có ba nghiệm

$\Leftrightarrow m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

- Khi $m > -1$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm\sqrt{m+1}$.

  Suy ra A(0; m), $B\left(-\sqrt{m+1}; -m^2 - m - 1\right)$ và $C\left(\sqrt{m+1}; -m^2 - m - 1\right)$.

  Ta có: OA = BC $\Leftrightarrow m^2 = 4(m + 1) \Leftrightarrow m = 2 \pm 2\sqrt{2}$ (thỏa $m > -1$)

  Vậy: $m = 2 \pm 2\sqrt{2}$.

Bài 2: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2009

> Cho hàm số $y = x^3 - (2m - 1)x^2 + (2 - m)x + 2$ (1), với m là tham số thực
> Tìm các giá trị của m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) có hoành độ dương.

Giải

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$, $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2(2m - 1)x + 2 - m = 0$ (*)
- Yêu cầu bài toán tương đương với

Phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 5 > 0 \\ \dfrac{2-m}{3} > 0 \\ \dfrac{2(2m-1)}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \text{ hay } m > \dfrac{5}{4} \\ m < 2 \\ m > \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 2.$$

Bài 3: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2007

> Cho hàm số: $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ (1), m là tham số.
> Tìm m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) cách đều gốc tọa độ O.

Giải

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

  Ta có: $y' = -3x^2 + 6x + 3(m^2 - 1)$

  $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m^2 + 1 = 0$ (2)
- Hàm số (1) có cực trị $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt

  $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$

  Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - m \Rightarrow y = -2 - 2m^3 \\ x = 1 + m \Rightarrow y = -2 + 2m^3 \end{array}\right.$.
- Gọi A, B là 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) thì

  $A(1 - m; -2 - 2m^3)$, $B(1 + m; -2 + 2m^3)$.
- O cách đều A và B $\Leftrightarrow OA = OB \Leftrightarrow 8m^3 = 2m \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{1}{2}$ (vì $m \neq 0$).

Bài 4: CAO ĐẲNG KỸ THUẬT CAO THẮNG NĂM 2007

> Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x + m}$, (1) (m là tham số)
>
> **1/** Tìm m để hàm số (1) có hai giá trị cực trị trái dấu nhau.
>
> **2/** Tìm m để hàm số (1) đạt cực đại tại x = 2.

Giải

1/ Hai giá trị cực trị trái dấu nhau

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số (1) không cắt trục hoành

$\Leftrightarrow x^2 + mx + 1 = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

***Cách khác*:**

Nghiệm của $y' = 0$ là $x_1 = -m + 1$, $x_2 = -m - 1$

Ta có $y(x_1) = -m + 2$, $y(x_2) = -m - 2$

Hai giá trị cực trị trái dấu nhau $\Leftrightarrow y(x_1).y(x_2) < 0$

$\Leftrightarrow (-m+2)(-m-2) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

2/ • Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$ và $y' = \dfrac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2}$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ thì $y'(2) = 0$.

Nghĩa là: $m^2 + 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \vee m = -3$

Khi $m = -1$ thì $y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗		↘	‖	↘		↗	$+\infty$

Hàm số không đạt cực đại tại $x = 2$.

Khi $m = -3$ thì $y' = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	1	↘	‖	↘		↗	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

Kết luận $m = -3$, khi đó giá trị cực đại tương ứng là $y(2) = 1$.

Bài 5: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2007

Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m}{x+2}$ (1), m là tham số

Tìm m để hàm số (1) có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tam giác vuông tại O.

Giải

- Tập xác định: D = $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và $y' = \dfrac{x^2+4x+4-m^2}{(x+2)^2}$
- Hàm số (1) có cực đại và cực tiểu
  $\Leftrightarrow$ g(x) = $x^2 + 4x + 4 - m^2$ có 2 nghiệm phân biệt

(Khi g(x) = 0 có 2 nghiệm phân biệt thì 2 nghiệm đó thỏa $x \neq -2$)

$\Leftrightarrow \Delta' = 4-4+m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$

- $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2-m \Rightarrow y=-2 \\ x=-2+m \Rightarrow y=4m-2 \end{array}\right.$

Gọi A, B là các điểm cực trị của đồ thị hàm số (1)

$\Rightarrow$ A(–2 –m; –2), B(–2 + m; 4m – 2).

Do $\overrightarrow{OA} = (-m-2;-2) \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{OB} = (m-2; 4m-2) \neq \vec{0}$

Nên ba điểm O, A, B tạo thành tam giác vuông tại O

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow -m^2 - 8m + 8 = 0 \Leftrightarrow m = -4 \pm 2\sqrt{6}$ (thỏa mãn $m \neq 0$).

Vậy giá trị cần tìm là: $m = -4 \pm 2\sqrt{6}$.

Bài 6: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2005

> Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2+(m+1)x+m+1}{x+1}$ (m là tham số).
>
> Chứng minh rằng với m bất kỳ, đồ thị (C_m) luôn có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách giữa hai điểm đó bằng $\sqrt{20}$.

Giải

Ta có: $y = x + m + \dfrac{1}{x+1}$

Tập xác định : D = $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$y' = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hay $x = 0$.

Đồ thị hàm số luôn có hai điểm cực trị là M(–2; m–3) và N(0; m + 1) đồng thời $MN = \sqrt{\left(0-(-2)\right)^2 + \left((m+1)-(m-3)\right)^2} = \sqrt{20}$ (Điều phải chứng minh)

Bài 7: ĐỀ DỰ BỊ 1

> Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ (1) với m là tham số.
>
> Tìm m để đồ thị hàm số (1) có 3 điểm cực trị là 3 đỉnh của một tam giác vuông cân.

Giải

♦ Tìm m để hàm số có 3 cực trị.

- $y' = 4x^3 - 4m^2x$

- $y' = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - m^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = m \Rightarrow y = 1 - m^4 \\ x = -m \Rightarrow y = 1 - m^4 \end{array}\right.$
- Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.

♦ Ba điểm cực trị của đồ thị $A(0; 1)$, $B(m; 1 - m^4)$, $C(-m; 1 - m^4)$

- Ta có: $\overrightarrow{AB} = \left(m;\ -m^4\right)$, $\overrightarrow{AC} = \left(-m; -m^4\right)$.
- Vì y là hàm chẵn nên tam giác ABC luôn cân ở A. Do đó:

  Tam giác ABC vuông cân $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

  $$\Leftrightarrow -m^2 + m^8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m = 0 & (\text{loại}) \\ m = \pm 1 & \end{array}\right..$$

  Vậy $m = \pm 1$.

Bài 8: ĐỀ DỰ BỊ 2

> Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + (2m+1)x + m^2 + m + 4}{2(x+m)}$ (1) (m là tham số).
>
> Tìm m để hàm số (1) có cực trị và tính khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).

Giải

- Tìm m để hàm số có cực trị

  Tập xác định: $D = \mathbb{R} \backslash \{-m\}$.

  $y' = \dfrac{x^2 + 2mx + m^2 - 4}{2(x+m)^2}$;

  $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = x^2 + 2mx + m^2 - 4 = 0$ (*) có 2 nghiệm phân biệt

  (Khi $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt thì 2 nghiệm đó thỏa $x \neq -m$)

  Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ (*) có 2 nghiệm phân biệt

  $\Leftrightarrow \Delta'_g = m^2 - m^2 + 4 > 0$.

  Vậy với mọi m hàm số luôn có hai cực trị.

- Tính độ dài hai điểm cực trị.

  Gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số. Khi đó:

  ♦ x_1, x_2 là nghiệm (*). Theo Viét ta có: $x_1 + x_2 = -2m$, $x_1.x_2 = m^2 - 4$.

  ♦ $y_1 = \dfrac{2x_1 + 2m + 1}{2}$ và $y_2 = \dfrac{2x_2 + 2m + 1}{2}$.

Ta có $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{2(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2}$

$$= \sqrt{8m^2 - 8\left(m^2 - 4\right)} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

Bài 9:

Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2$ (1) (m là tham số). Viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).

Giải

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

  Ta có $y' = -3x^2 + 6mx + 3(1 - m^2)$

  $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ có $\Delta' = 1 > 0, \forall m$.

  Do đó phương trình y' = 0 luôn có 2 nghiệm phân biệt, nghĩa là hàm số (1) luôn có 2 cực trị với mọi m.

- Ta có $y = \frac{1}{3}(x - m)y' + 2x + m - m^2$ (*)

  Gọi $A(x_0; y_0)$ là cực trị của đồ thị hàm số (1) thì $y'(x_0) = 0$ và tọa độ điểm A thỏa phương trình (*):

$$y_0 = \frac{1}{3}(x_0 - m)y'(x_0) + 2x_0 + m - m^2 \Leftrightarrow y_0 = 2x_0 + m - m^2$$

  Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) có phương trình

$$y = 2x + m - m^2.$$

Bài 10: ĐỀ DỰ BỊ 2

Cho hàm số $y = (x - m)^3 - 3x$ (m là tham số) Xác định m để hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm có hoành độ x = 0.

Giải

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$, $y' = 3(x - m)^2 - 3$, $y'' = 6(x - m)$
- Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm có hoành độ x = 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(0) = 0 \\ y''(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(0 - m)^2 - 3 = 0 \\ 6(0 - m) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$$

Bài 11:

Cho hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ (1) (m là tham số). Tìm m để hàm số (1) có 3 điểm cực trị.

Giải

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 4mx^3 + 2(m^2 - 9)x,\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2mx^2 + m^2 - 9 = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

- Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow$ (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \frac{m^2 - 9}{2m} < 0 \Leftrightarrow m < -3 \text{ hay } 0 < m < 3.$$

Bài 12: ĐỀ DỰ BỊ 1

> Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx}{1 - x}$ (1) (m là tham số).
>
> Tìm m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu. Với giá trị nào của m thì khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) bằng 10 ?

Giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ và $y' = \dfrac{-x^2 + 2x + m}{(1 - x)^2}$

- Hàm số có cực đại, cực tiểu

$\Leftrightarrow g(x) = -x^2 + 2x + m = 0$ (*) có 2 nghiệm phân biệt

(Khi $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt thì 2 nghiệm đó thỏa $x \neq 1$)

$\Leftrightarrow \Delta'_{g(x)} = 1 + m > 0 \Leftrightarrow m > -1.$

- Gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số. Khi đó:
  - ♦ x_1, x_2 là nghiệm (*). Theo Viét ta có $x_1 + x_2 = 2$, $x_1.x_2 = -m$.
  - ♦ $y_1 = -2x_1 - m$ và $y_2 = -2x_2 - m$.
- $AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + 4(x_1 - x_2)^2$

$\Leftrightarrow 100 = 5\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right]$

$\Leftrightarrow 20 = 4 + 4m \Leftrightarrow m = 4$ (Thỏa điều kiện $m > -1$) .

✓ *Vấn đề 4:*

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

> **I. ĐỊNH NGHĨA**
>
> Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D.
>
> - Nếu $f(x) \le M;\ \forall x \in D$ và $\exists x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$ thì M gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D.
>
> *Kí hiệu:* $\max\limits_{x \in D} f(x) = M$
>
> - Nếu $f(x) \ge m;\ \forall x \in D$ và $\exists x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$ thì m gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D.
>
> *Kí hiệu:* $\min\limits_{x \in D} f(x) = m$

II. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ THƯỜNG GẶP.

- ***Phương pháp 1:*** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0) \text{ trên } \mathbb{R}.$$

Phân tích $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

\+ Nếu $a > 0$ thì $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -\frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$

\+ Nếu $a < 0$ thì $\max\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -\frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$

- ***Phương pháp 2:*** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0) \text{ trên } [\alpha; \beta].$$

Tìm hoành độ đỉnh parabol $x_0 = -\frac{b}{2a}$

\+ *Trường hợp 1:* $a > 0$ $\max\limits_{x\in[\alpha;\,\beta]} f(x) = \max\{f(\alpha), f(\beta)\}$

– Nếu $x_0 \in [\alpha; \beta]$ thì $\min\limits_{x\in[\alpha;\,\beta]} f(x) = f(x_0)$

– Nếu $x_0 \notin [\alpha; \beta]$ thì $\min\limits_{x\in[\alpha;\,\beta]} f(x) = \min\{f(\alpha), f(\beta)\}$

\+ *Trường hợp 2:* $a < 0$: $\min\limits_{x\in[\alpha;\,\beta]} f(x) = \min\{f(\alpha), f(\beta)\}$

– Nếu $x_0 \in [\alpha; \beta]$ thì $\max\limits_{x\in[\alpha;\,\beta]} f(x) = f(x_0)$

– Nếu $x_0 \notin [\alpha; \beta]$ thì $\max\limits_{x\in[\alpha;\,\beta]} f(x) = \max\{f(\alpha), f(\beta)\}$

- ***Phương pháp 3:*** Dùng tính chất đơn điệu của hàm số.

Bài toán: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$

– Tìm nghiệm x_0 của $f'(x)$ trong $[a; b]$.

– Khi đó $\min\limits_{x\in[a;\,b]} f(x) = \min\{f(a), f(b), f(x_0)\}$

$$\max\limits_{x\in[a;\,b]} f(x) = \max\{f(a), f(b), f(x_0)\}$$

Bài toán: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ không phải trên $[a; b]$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Chú ý:

– Nếu hàm số y = f(x) tăng trên [a, b] thì:

$$\min_{x\in[a;\, b]} f(x) = f(a) \text{ và } \max_{x\in[a;\, b]} f(x) = f(b)$$

– Nếu hàm số y = f(x) giảm trên [a, b] thì:

$$\min_{x\in[a;\, b]} f(x) = f(b) \text{ và } \max_{x\in[a;\, b]} f(x) = f(a)$$

– Nếu bài toán phải đặt ẩn số phụ thì phải có điều kiện cho ẩn số phụ đó.

- ***Phương pháp 4:*** Dùng miền giá trị của hàm số y = f(x) ($x \in D$)

y thuộc miền giá trị của hàm số y = f(x)

$\Leftrightarrow$ Phương trình y = f(x) có nghiệm $x \in D$.

Từ đó ta tìm được điều kiện của y và suy ra được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Chú ý: Phương trình: asinx + bcosx = c

có nghiệm $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2$

- ***Phương pháp 5****:* Dùng bất đẳng thức

Dùng các bất đẳng thức đại số để chặn biểu thức f(x) rồi dùng định nghĩa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất để tìm đáp số.

+ *Lưu ý*: Phải xét dấu "=" xảy ra trong tất cả các bất đẳng thức đã dùng trong quá trình giải.

B. ĐỀ THI

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2011

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{2x^2+3x+3}{x-1}$ trên đoạn [0; 2].

Giải

- $y = \dfrac{2x^2+3x+3}{x-1} \Rightarrow y' = \dfrac{2x^2+4x}{(x-1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [0;\, 2] \\ x = -2 \notin [0;\, 2] \end{array}\right.$.
- Ta có: $y(0) = 3$ và $y(2) = \dfrac{17}{3}$.
- Vì hàm số đã cho liên tục trên [0; 2] nên:

$$\min_{[0;\, 2]} y = y(0) = 3 \text{ và } \max_{[0;\, 2]} y = y(2) = \frac{17}{3}.$$

Bài 2: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2009

Cho các số thực không âm x, y thay đổi và thỏa mãn x + y = 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$.

Giải

- $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy = 16x^2y^2 + 12(x^3 + y^3) + 34xy$
  $= 16x^2y^2 + 12[(x + y)^3 - 3xy(x + y)] + 34xy = 16x^2y^2 + 12(1 - 3xy) + 34xy$
  $= 16x^2y^2 - 2xy + 12$
- Đặt $t = x.y$. Vì $x, y \ge 0$ và $x + y = 1$ nên $0 \le t \le \frac{1}{4}$.

  Khi đó $S = 16t^2 - 2t + 12$
- $S' = 32t - 2$; $S' = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{16} \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$
- Ta có $S(0) = 12$, $S(\frac{1}{4}) = \frac{25}{2}$, $S(\frac{1}{16}) = \frac{191}{16}$.
- Vì S liên tục trên $[0; \frac{1}{4}]$ nên:

  Max $S = \frac{25}{2}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$

  Min $S = \frac{191}{16}$ khi $\begin{cases} x = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \\ y = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \\ y = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \end{cases}$.

Bài 3: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2008

Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $x^2 + y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$.

Giải

- Ta có: $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy = 2(x+y)\left(x^2+y^2-xy\right)-3xy$

  $= 2(x + y)(2 - xy) - 3xy$.
- Ta lại có: $x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 2xy = 2 \Leftrightarrow xy = \frac{(x+y)^2-2}{2}$.
- Do đó $P = 2(x+y)\left(2-\frac{(x+y)^2-2}{2}\right)-3\frac{(x+y)^2-2}{2}$.
- Đặt $t = x + y$. Khi đó $t^2 = (x + y)^2 \le 2(x^2 + y^2) = 4$ nên $|t| \le 2$

  và $P = 2t\left(2-\frac{t^2-2}{2}\right)-3\frac{t^2-2}{2} = -t^3-\frac{3}{2}t^2+6t+3$ với $|t| \le 2$.
- Xét $g(t) = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3$ trên đoạn $[-2; 2]$

  $g'(t) = -3t^2 - 3t + 6$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \in [-2;\, 2] \\ t = -2 \in [-2;\, 2] \end{array}\right.$$

$$g(-2) = -7;\ g(2) = 1;\ g(1) = \frac{13}{2}$$

Vậy $P_{max} = \dfrac{13}{2}$ khi $x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ và $y = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ hoặc $x = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ và $y = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

$P_{min} = -7$ khi $x = y = -1$.

Bài 4:

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1;\, e^3]$

Giải

- $y' = \dfrac{2\ln x.\frac{1}{x}.x - 1.\ln^2 x}{x^2} = \dfrac{-\ln^2 x + 2\ln x}{x^2}$
- $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln x = 0 \\ \ln x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [1;\, e^3] \\ x = e^2 \in [1;\, e^3] \end{array}\right.$
- Ta có $y(1) = 0$, $y(e^3) = \dfrac{9}{e^3}$, $y(e^2) = \dfrac{4}{e^2}$.
- Vì y liên tục trên $[1;\, e^3]$ nên

$$\max_{[1;\, e^3]} y = \max\left\{0;\ \frac{9}{e^3};\ \frac{4}{e^2}\right\} = \frac{4}{e^2} \quad \text{và} \quad \min_{[1;\, e^3]} y = \min\left\{0;\ \frac{9}{e^3};\ \frac{4}{e^2}\right\} = 0.$$

Bài 5: ĐỀ DỰ BỊ 1

Cho hàm số $f(x) = e^x - \sin x + \dfrac{x^2}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số f(x) và chứng minh rằng phương trình f(x) = 3 có đúng hai nghiệm.

Giải

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- $f'(x) = e^x - \cos x + x$ (1); $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - \cos x + x = 0$

  Nhận xét:
  - (1) có 1 nghiệm $x = 0$
  - Vế trái của (1): $y = e^x - \cos x + x$ có $y' = e^x + \sin x + 1 > 0$ nên y tăng. Do đó (1) có nghiệm duy nhất $x = 0$.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		–	0	+	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, GTNN của f(x) bằng 1.

Và đường thẳng (d): y = 3 cắt đồ thị hàm số y = f(x) tại hai điểm phân biệt nên phương trình f(x) = 3 có hai nghiệm phân biệt.

Bài 6:

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên đoạn [–1; 2].

Giải

- $y' = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - (x+1)\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\left(x^2+1\right)} = \dfrac{1-x}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)}$.
- $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-1; 2]$.
- Ta có: $y(-1) = 0$, $y(2) = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$, $y(1) = \sqrt{2}$.
- Vì y liên tục trên [–1; 2] nên

$\max\limits_{[-1;\,2]} y = \max\{0; \dfrac{3}{\sqrt{5}}; \sqrt{2}\} = \sqrt{2}$ và $\min\limits_{[-1;\,2]} y = \min\{0; \dfrac{3}{\sqrt{5}}; \sqrt{2}\} = 0$

Bài 7: CAO ĐẲNG NGUYỄN TẤT THÀNH

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2}{x+2}$ trên đoạn [–5; –3].

Giải

- $y' = \dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2}$
- $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin [-5; -3] \\ x = -4 \in [-5; -3] \end{array}\right.$
- Ta có: $y(-5) = -\dfrac{25}{3}$, $y(-4) = -8$, $y(-3) = -9$.
- Vì y liên tục trên đoạn [–5; –3] nên $\max\limits_{[-5;-3]} y = -8$, $\min\limits_{[-5;-3]} y = -9$.

Bài 8: ĐỀ DỰ BỊ 1

> Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^6 + 4(1 - x^2)^3$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Giải

- Đặt $t = x^2$, vì $-1 \le x \le 1$ nên $0 \le t \le 1$.
- Khi đó $y = t^3 + 4(1 - t)^3 = -3t^3 + 12t^2 - 12t + 4 = f(t)$ với $0 \le t \le 1$.
- $f'(t) = -9t^2 + 24t - 12;\quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{2}{3} \in [0;\ 1] \\ t = 2 \notin [0;\ 1] \end{array}\right.$
- Ta có: $f(0) = 4$, $f(\frac{2}{3}) = \frac{4}{9}$, $f(1) = 1$
- Vì f liên tục trên đoạn [0; 1] nên

$$\max_{[-1;1]} y = \max_{[0;1]} f(t) = 4 \text{ và } \min_{[-1;1]} y = \min_{[0;1]} f(t) = \frac{4}{9}$$

Bài 9:

> Giả sử x, y là hai số dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $x + y = \frac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}$.

Giải

Cách 1: Dùng khảo sát hàm số

- Ta có: $x + y = \frac{5}{4} \Rightarrow y = \frac{5}{4} - x$. Vì $y > 0$ nên $x < \frac{5}{4}$

$$S = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y} = \frac{4}{x} + \frac{1}{5 - 4x};\ 0 < x < \frac{5}{4}$$

- $S' = \dfrac{-4}{x^2} + \dfrac{4}{(5 - 4x)^2} = \dfrac{4(5x - 5)(5 - 3x)}{x^2(5 - 4x)^2}$
- $S' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \dfrac{5}{3}$
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{4}$
S'		−	0	+	
S		↘	5	↗	

- Dựa vào Bảng biến thiên ta có $S_{min} = 5$ khi x = 1.

Cách 2: Dùng bất đẳng thức Cauchy:

$$S = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{4y} \geq 5\sqrt[5]{\frac{1}{x^4.4y}}$$

$$S \geq 5\sqrt[5]{\frac{1}{x.x.x.x.4y}} \geq \frac{5.5}{x+x+x+x+4y} = \frac{25}{4x+4y} = \frac{25}{5} = 5$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{4y} \\ x + y = \dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

Vậy $S_{min} = 5$

✓ *Vấn đề 5:* ĐIỂM UỐN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Hàm số y = f(x) có đạo hàm cấp hai trên một khoảng chứa điểm x_0, $f''(x_0) = 0$ và f''(x) đổi dấu khi x đi qua x_0 thì điểm $I(x_0; f(x_0))$là một điểm uốn của đồ thị hàm số y = f(x).

B. ĐỀ THI

Bài 1:

Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 9x + 1$ (1) (m là tham số).
Tìm m để điểm uốn của đồ thị hàm số (1) thuộc đường thẳng y = x + 1.

Giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 9$

$y'' = 6x - 6m$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = m \Rightarrow y = -2m^3 + 9m + 1$

Suy ra điểm uốn $I(m; -2m^3 + 9m + 1)$

Ta có I thuộc đường thẳng $y = x + 1 \Leftrightarrow -2m^3 + 9m + 1 = m + 1$

$\Leftrightarrow 2m^3 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hay $m = 2$ hay $m = -2$.

✓ *Vấn đề 6:* ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Cho hàm số y = f(x) có đồ thị (C).

1. TIỆM CẬN ĐỨNG

Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C) nếu ít nhất một trong bốn điều kiện sau được thỏa:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \;;\; \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \;;\; \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \;;\; \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty .$$

2. TIỆM CẬN NGANG

Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (C) nếu

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0$$

3. TIỆM CẬN XIÊN

Đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ là tiệm cận xiên của đồ thị (C) nếu

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(ax + b \right) \right] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - \left(ax + b \right) \right] = 0$$

Cách khác:

Đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ là tiệm cận xiên của đồ thị (C) khi và chỉ khi

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ và } b = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - ax \right]$$

hoặc $$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ và } b = \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - ax \right]$$

B. ĐỀ THI

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2008

Cho hàm số $y = \dfrac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m}$ (C), với m là tham số thực.

Tìm giá trị của m để góc giữa hai đường tiệm cận của đồ thị (C) là 45^0.

Giải

Ta có: $y = mx - 2 + \dfrac{6m - 2}{x + 3m}$

- Khi $m = \dfrac{1}{3}$ đồ thị không có tiệm cận.
- Khi $m \neq \dfrac{1}{3}$ đồ thị có hai tiệm cận là: $\begin{cases} d_1 : x = -3m \\ d_2 : y = mx - 2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} d_1 : x + 3m = 0 \\ d_2 : mx - y - 2 = 0 \end{cases}$

d_1 có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = (1;\ 0)$, d_2 có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2} = (m;\ -1)$.

- $\cos\left(d_1; d_2\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{|m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow 2|m| = \sqrt{2}\sqrt{m^2 + 1} \Leftrightarrow 4m^2 = 2\left(m^2 + 1\right) \Leftrightarrow m = \pm 1 \text{ (thỏa } m \neq \frac{1}{3}\text{)}$$

Bài 2: CAO ĐẲNG GTVT III KHỐI A NĂM 2007

> Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C).
>
> Tìm các điểm M trên (C) có tổng khoảng cách đến 2 tiệm cận của (C) bằng 4.

Giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 2$.

Suy ra đồ thị (C) có $x = 1$ là tiệm cận đứng và $y = 2$ là tiệm cận ngang.

$M \in (C)$ nên $M\left(m;\ \dfrac{2m+1}{m-1}\right)$

Tổng khoảng cách từ M đến 2 tiệm cận là

$$d = |x_M - 1| + |y_M - 2| = |m-1| + \left|\frac{2m+1}{m-1} - 2\right| = |m-1| + \frac{3}{|m-1|}$$

Ta có: $d = 4 \Leftrightarrow |m-1| + \dfrac{3}{|m-1|} = 4 \Leftrightarrow |m-1|^2 - 4|m-1| + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |m-1| = 1 \\ |m-1| = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1 = \pm 1 \\ m-1 = \pm 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow m = 2 \vee m = 0 \vee m = 4 \vee m = -2$$

Vậy có 4 điểm: $M_1(2; 5)$; $M_2(0; -1)$; $M_3(4; 3)$; $M_4(-2; 1)$.

Bài 3: CAO ĐẲNG KỸ THUẬT CAO THẮNG

> Gọi C_m là đồ thị của hàm số $y = -x + m + 1 - \dfrac{m^2}{x+m}$ (*) (m là tham số).
>
> Tìm m để tiệm cận xiên của C_m đi qua A(2; 0).

Giải

Khi m = 0 thì (C_0): y = – x, suy ra (C_0) không có tiệm cận xiên.

Khi $m \neq 0$, ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{m^2}{x+m} = 0 \Rightarrow$ Tiệm cận xiên của C_m: $y = -x + m + 1$

Điểm A(2; 0) thuộc tiệm cận xiên của đồ thị (Cm) khi và chỉ khi:

$0 = -2 + m + 1 \Leftrightarrow m = 1$ (thỏa điều kiện $m \neq 0$)

Vậy nếu m = 1 thì tiệm cận xiên của (C_m) đi qua điểm A(2; 0)

Bài 4: CAO ĐẲNG KINH TẾ – KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP I

> Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - mx + 2m - 1}{mx - 1}$ (1) có đồ thị là (C_m), m là tham số.
>
> Xác định m để tiệm cận xiên của (C_m) đi qua gốc tọa độ và hàm số (1) có cực trị

Giải

Ta có $y' = \dfrac{mx^2 - 2x - 2m^2 + 2m}{(mx-1)^2} \Rightarrow y = \dfrac{x}{m} + \dfrac{1-m^2}{m^2} + \dfrac{2m^3 - 2m^2 + 1}{m^2(mx-1)}$

Với $2m^3 - 2m^2 + 1 \neq 0$ và $m \neq 0$, ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2m^3 - 2m^2 + 1}{m^2(mx-1)} = 0$.

Suy ra tiệm cận xiên của (C_m) có phương trình $y = \dfrac{x}{m} + \dfrac{1-m^2}{m^2}$

Yêu cầu bài toán tương đương với

$$\begin{cases} mx^2 - 2x - 2m^2 + 2m = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt} \\ 0 = \dfrac{1-m^2}{m^2} \\ 2m^3 - 2m^2 + 1 \neq 0 \wedge m \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 2m^3 - 2m^2 + 1 > 0 \\ m = \pm 1 \\ 2m^3 - 2m^2 + 1 \neq 0 \wedge m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

✓ *Vấn đề 7:*

KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số y = f(x)

- Tập xác định của hàm số.
- Sự biến thiên:
  - + Chiều biến thiên:
    Tính đạo hàm cấp 1 và tìm nghiệm của đạo hàm (nếu có).
    Kết luận tính đơn điệu của hàm số.
  - + Cực trị của hàm số.
  - + Giới hạn của hàm số và đường tiệm cận (nếu có) của đồ thị hàm số.
- Lập bảng biến thiên.
- Vẽ đồ thị.

B. ĐỀ THI

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2010

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = -x^4 - x^2 + 6$

Giải

- Tập xác định: D = R.

- Sự biến thiên:

  + Chiều biến thiên:

  Đạo hàm: $y' = -4x^3 - 2x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

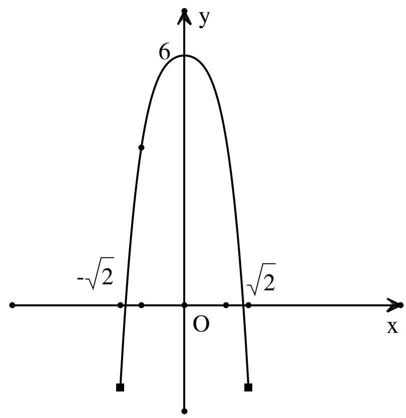
  Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$

  và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$

  + Cực trị:

  Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = 6$

  + Giới hạn: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = -\infty$



- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+	0	−	
y	$-\infty$	↗	6	↘	$-\infty$

- Đồ thị: (C) cắt Ox tại hai điểm $A\left(\sqrt{2};\ 0\right)$, $B\left(-\sqrt{2};\ 0\right)$.

Bài 2 : ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2009

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2$

Giải

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Sự biến thiên:

  + Chiều biến thiên:

  Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 1$.

  Hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$

  Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

  + Cực trị:

  Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = 0$

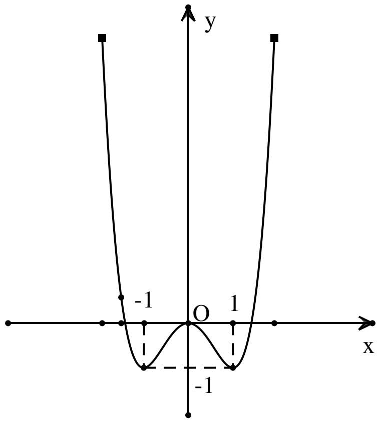
  Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$, $y_{CT} = -1$.

  + Giới hạn: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = +\infty$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	0	+	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

- Đồ thị: Giao điểm của đồ thị với trục hoành là (0; 0); $(\pm\sqrt{2}\ ; 0)$



Bài 3: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2008

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$.

Giải

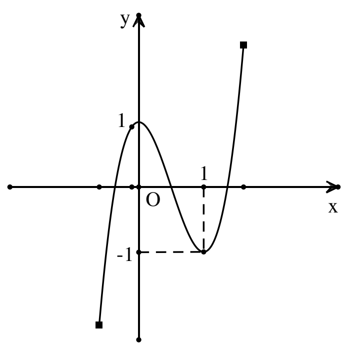
- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Sự biến thiên:
  + Chiều biến thiên:

    Đạo hàm: $y' = 12x^2 - 12x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

    Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$; hàm số nghịch biến trên $(0; 1)$
  + Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = 1$

    Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$, $y_{CT} = -1$
  + Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		+	0	$-$	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$



- Đồ thị

Bài 4: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2007

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Giải

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Sự biến thiên:
  + Chiều biến thiên:

Đạo hàm: $y' = -3x^2 + 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$

Hàm số đồng biến trên (0; 2), hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$

+ Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại x = 2, $y_{CĐ} = 0$

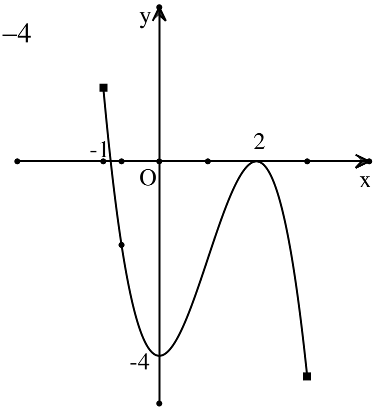
Hàm số đạt cực tiểu tại x = 0, $y_{CT} = -4$

+ Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	0	↘	$-\infty$

- Đồ thị:



Bài 5: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2007

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{2x}{x+1}$ đã cho.

Giải

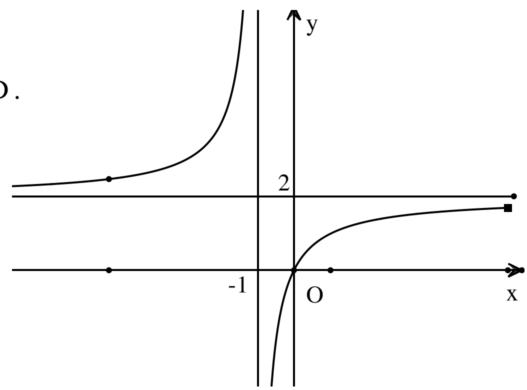
- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

Đạo hàm: $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$.

Hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

+ Hàm số đã cho không có cực trị.



- Giới hạn và tiệm cận:

$\lim\limits_{x\to-1^+} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^-} y = +\infty$

$\Rightarrow$ Tiệm cận đứng x = –1.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 2 \Rightarrow$ Tiệm cận ngang y = 2.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

- Đồ thị: (hình trên)

Bài 6:

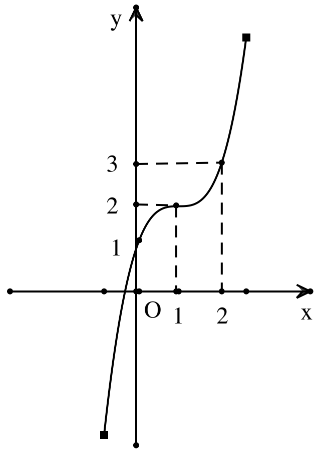
Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.

Giải

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Sự biến thiên:
  - \+ Chiều biến thiên:
    Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x + 3$, $y' = 0$ có nghiệm kép $x = 1$
    nên $y' \geq 0, \forall x \in D$.
    Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.
  - \+ Cực trị: Hàm số không có cực trị.
  - \+ Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

- Đồ thị: (hình bên)



Bài 7:

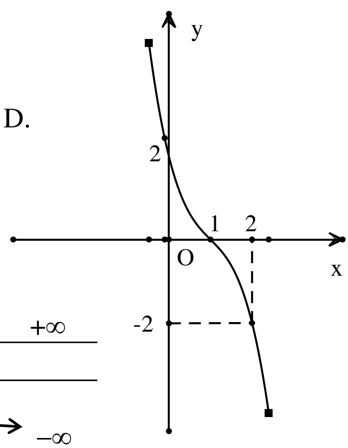
Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2$.

Giải

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Sự biến thiên:
  - \+ Chiều biến thiên:
    Đạo hàm: $y' = -3x^2 + 6x - 4$, và $y' < 0, \forall x \in D$.
    Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$.
  - \+ Cực trị: Hàm số không có cực trị.
  - \+ Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

- Đồ thị: (hình bên)



Bài 8:

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \dfrac{-x^2 + 3x - 3}{2(x-1)}$.

Giải

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

Đạo hàm: $y' = \dfrac{-x^2 + 2x}{2(x-1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 2$

Hàm số đồng biến trên khoảng (0; 1) và (1; 2)

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$

+ Cực trị : Hàm số đạt cực đại tại x = 2, $y_{CĐ} = -\dfrac{1}{2}$.

Hàm số đạt cực tiểu tại x = 0, $y_{CT} = \dfrac{3}{2}$.

- Giới hạn và tiệm cận:

+ $\lim\limits_{x \to 1^-} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 1+} y = -\infty \Rightarrow x = 1$ là phương trình tiệm cận đứng.

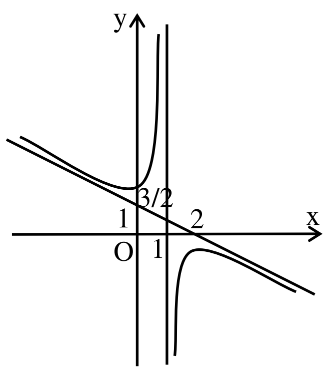
+ $y = -\dfrac{1}{2}x + 1 - \dfrac{1}{2(x-1)}$ và $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{2(x-1)} = 0$

$\Rightarrow y = -\dfrac{x}{2} + 1$ là phương trình tiệm cận xiên.

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		1		2		$+\infty$
y'		−	0	+	0	+	0	−	
y	$+\infty$	↘	$\frac{3}{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$

- Đồ thị



✓ *Vấn đề 8:*

DÙNG ĐỒ THỊ BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Biến đổi phương trình đã cho g(x, m) = 0 về dạng f(x) = h(m) (*).
- Trong đó đồ thị (C) của hàm số y = f(x) đã được vẽ trong câu hỏi trước đó.

Xem đường thẳng d: y = h(m) là đường thẳng cùng phương với trục hoành.

Do đó phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d.

- Số điểm chung của đồ thị (C) và đường thẳng d chính bằng số nghiệm của phương trình đã cho.

B. ĐỀ THI

Bài 1: ĐỀ DỰ BỊ 1 - ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2006

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) hàm số: $y = \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x + 1}$.

2/ Dựa vào đồ thị (C), tìm m để phương trình: $x^2 + 2x + 5 = (m^2 + 2m + 5)(x + 1)$ có hai nghiệm dương phân biệt.

Giải

1/
- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,
- Sự biến thiên:

  \+ Chiều biến thiên:

  Đạo hàm: $y' = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hay $x = -3$

  Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ và $(1; +\infty)$

  Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; -1)$ và $(-1; 1)$

  \+ Cực trị:

  Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$, $y_{CĐ} = -4$

  Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$, $y_{CT} = 4$.
- Giới hạn và tiệm cận:

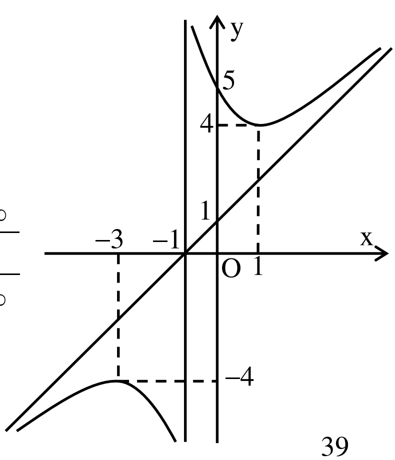
  \+ $\lim\limits_{x \to -1^-} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1+} y = +\infty$ $\Rightarrow x = -1$ là phương trình tiệm cận đứng.

  \+ $y = x + 1 + \dfrac{4}{x+1}$ và $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{4}{x+1} = 0$

  $\Rightarrow y = x + 1$ là phương trình tiệm cận xiên.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

- Đồ thị



2/ Ta có: $x^2 + 2x + 5 = (m^2 + 2m + 5)(x + 1)$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x+5}{x+1} = m^2 + 2m + 5.\ (*)$$

(vì $x > 0$ nên $x + 1 \neq 0$)

Gọi d là đường thẳng có phương trình :

$y = m^2 + 2m + 5.$

Suy ra phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d.

Do đó: Phương trình (*) có hai nghiệm dương

$\Leftrightarrow$ d cắt phần đồ thị (C) ứng với $x > 0$ tại 2 điểm

$$\Leftrightarrow 4 < m^2 + 2m + 5 < 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m+1>0 \\ m^2+2m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ -2 < m < 0 \end{cases}$$

Bài 2: ĐỀ DỰ BỊ 1 - ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2005

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 6x^2 + 5$

2/ Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt: $x^4 - 6x^2 - \log_2 m = 0.$

Giải

1/
- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Sự biến thiên:
  - + Chiều biến thiên:

    Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 12x;\ y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3}$

    Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\sqrt{3}\,;0)$ và $(\sqrt{3}\,;+\infty)$

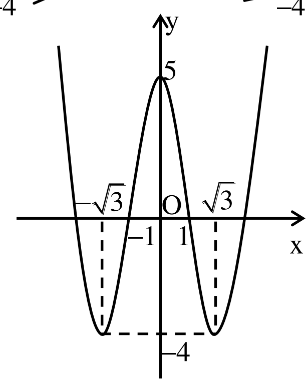
    Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;\ -\sqrt{3})$ và $(0;\ \sqrt{3})$
  - + Cực trị:

    Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = 5$

    Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm\sqrt{3}$, $y_{CT} = -4.$
  - + Giới hạn: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = +\infty$
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		–	0	+	0	–	0	+	
y	$+\infty$	↘	–4	↗	5	↘	–4	↗	$+\infty$

- Đồ thị



2/ Ta có $x^4 - 6x^2 - \log_2 m = 0 \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 5 = \log_2 m + 5$ (*)

Gọi d là đường thẳng có phương trình $y = \log_2 m + 5$.

Suy ra phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d.

Do đó: Phương trình (*) có 4 nghiệm $\Leftrightarrow$ d và (C) có 4 điểm chung

$$\Leftrightarrow -4 < \log_2 m + 5 < 5 \Leftrightarrow -9 < \log_2 m < 0 \Leftrightarrow 2^{-9} < m < 1.$$

Bài 3:

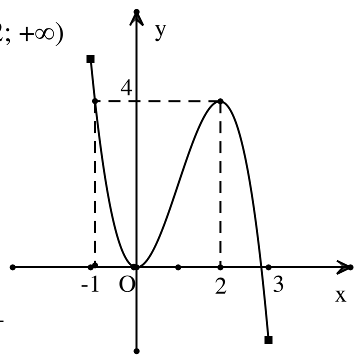
Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2$ (1)

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1).

2/ Tìm k để phương trình $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Giải

1/
- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Sự biến thiên:
  - \+ Chiều biến thiên:
    Đạo hàm: $y' = -3x^2 + 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 2$.
    Hàm số đồng biến trên khoảng (0; 2)
    Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$
  - \+ Cực trị:
    Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$, $y_{CĐ} = 4$
    Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = 0$.
  - \+ Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$



- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	+	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

- Đồ thị (hình bên)

2/ Ta có: $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 = -k^3 + 3k^2$ (*)

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2$ và đường thẳng d: $y = -k^3 + 3k^2$.

Suy ra phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d.

Do đó: Phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng d và đồ thị (C) có 3 điểm chung

$\Leftrightarrow 0 < -k^3 + 3k^2 < 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k^3 - 3k^2 < 0 \\ k^3 - 3k^2 + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2(k-3) < 0 \\ (k-2)^2(k+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < k < 3 \\ k \neq 0,\ k \neq 2 \end{cases}.$$

Bài 4: ĐỀ DỰ BỊ 2

Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$ (1)

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1).

2/ Tìm a để phương trình sau có nghiệm: $9^{1+\sqrt{1-t^2}} - (a+2).3^{1+\sqrt{1-t^2}} + 2a + 1 = 0$

Giải

1/ • Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

• Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

Đạo hàm: $y' = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ và $(2; 3)$

+ Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, $y_{CĐ} = 0$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$, $y_{CT} = 4$.

Giới hạn và tiệm cận:

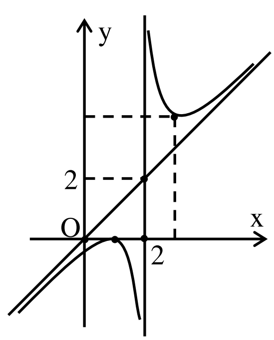
$+ \; y = x + \dfrac{1}{x-2}$ và $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2} \to \infty$ ($x = 2$ là phương trình tiệm cận đứng.)

$+ \; y = x + \dfrac{1}{x-2}$ và $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0 \Rightarrow y = x$ là phương trình tiệm cận xiên.

(Bảng biến thiên)

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'	$+\infty$	+	0	-	‖	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4	↗	$+\infty$

• Đồ thị



2/ Điều kiện: $1 - t^2 \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le t \le 1$.

Đặt $u = 3^{1+\sqrt{1-t^2}}$.

Ta có: $1 \le 1 + \sqrt{1-t^2} \le 2 \Leftrightarrow 3^1 \le 3^{1+\sqrt{1-t^2}} \le 3^{2.}$

Nghĩa là: $3 \le u \le 9$.

Phương trình đã cho trở thành:

$$u^2-(a+2)u+2a+1=0 \Leftrightarrow u^2-2u+1=a(u-2) \Leftrightarrow \frac{u^2-2u+1}{u-2}=a \quad (2)$$

Gọi (C') là một phần đồ thị hàm số $y=\frac{u^2-2u+1}{u-2}$ (đã được vẽ trong câu 1) giới hạn trên đoạn $[3; 9]$ và đường thẳng d: y = a.

Suy ra phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của (C') và d.

Do đó Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi

(2) có nghiệm $u \in [3; 9] \Leftrightarrow$ Đường cong (C') và đường thẳng d có điểm chung

$$\Leftrightarrow 4 \le m \le \frac{64}{7}$$

Bài 5: ĐỀ DỰ BỊ 2

> Cho hàm số $y = (x-1)^3 - 3x$ (m là tham số)
>
> **1/** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho.
>
> **2/** Tìm k để hệ sau có nghiệm $\begin{cases} |x-1|^3-3x-k=0 \\ \frac{1}{2}\log_2 x^2+\frac{1}{3}\log_2(x-1)^3 \le 1 \end{cases}$

Giải

1 • Tập xác định: D = $\mathbb{R}$.

• Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $x = 2$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$

+ Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại x = 0, $y_{CĐ} = -1$

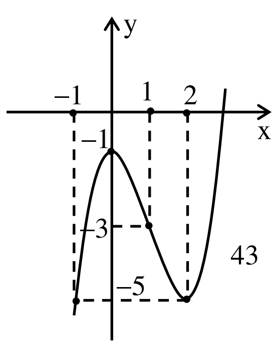
Hàm số đạt cực tiểu tại x = 2, $y_{CT} = -5$.

+ Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

• Đồ thị



2/ • Ta có: $\frac{1}{2}\log_2 x^2 + \frac{1}{3}\log_2 (x-1)^3 \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ \log_2 x + \log_2 (x-1) \le 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \log_2 x(x-1) \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x(x-1) \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ 1 \le x \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \le 2$$

• Với $1 < x \le 2$ ta có $|x-1|^3 - 3x - k = 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 - 3x = k$ (*)

Gọi (C') là một phần đồ thị hàm số $y = (x-1)^3 - 3x$ được giới hạn trên nửa khoảng $(1; 2]$ và đường thẳng d: y = k.

Suy ra phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của (C') và d.

Do đó: Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có nghiệm $x \in (1; 2]$

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng d và đồ thị (C') có điểm chung

$\Leftrightarrow -5 \le k < -3$

✓ *Vấn đề 9:*

ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Cho hàm số y = f(x) có đồ thị (C).

1. Vẽ đồ thị (C_1); $y_1 = |f(x)|$

Ta có: $y_1 = \begin{cases} y & \text{nếu } f(x) \ge 0 \\ -y & \text{nếu } f(x) \le 0 \end{cases}$

Vì $y_1 \ge 0$ nên (C_1) ở phía trên trục Ox. Đồ thị (C_1) từ đồ thị (C) bằng cách:

– Phần (C) ở phía trên Ox giữ nguyên.

– Bỏ phần của (C) ở phía dưới Ox và lấy phần đối xứng của phần này qua trục Ox.

2. Vẽ đồ thị (C_1) của hàm số: $y_1 = f(|x|)$ (với D là tập xác định đối xứng)

Ta có: $f(|x|) = f(|-x|)$: đây là hàm số chẵn nên đồ thị (C_1) nhận Oy làm trục đối xứng

Đồ thị (C_1) suy từ đồ thị (C) bằng cách:

– Phần của (C) bên phải trục Oy giữ nguyên.

– Bỏ phần của (C) bên trái Oy và lấy phần đối xứng của phần bên phải của (C) qua trục Oy.

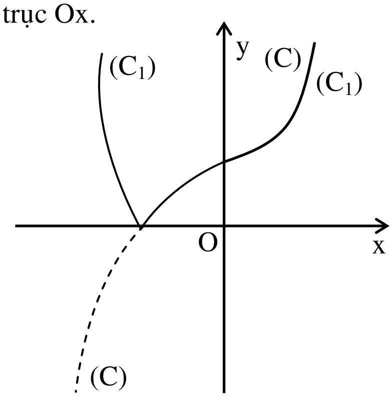
3. Vẽ đường cong (C_1); $|y_1| = f(x)$

- Nếu $y_1 \ge 0$ thì $y_1 = f(x)$: $(C_1) \equiv (C)$ ở trên trục Ox.
- Nếu $y_1 \le 0$ thì $y_1 = -f(x)$: (C_1) đối xứng của (C) ở trên trục Ox qua Ox.

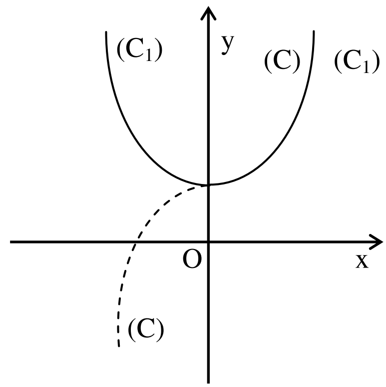
Đồ thị (C_1) suy từ đồ thị (C) bằng cách:

– Phần của (C) ở phía trên Ox giữ nguyên.

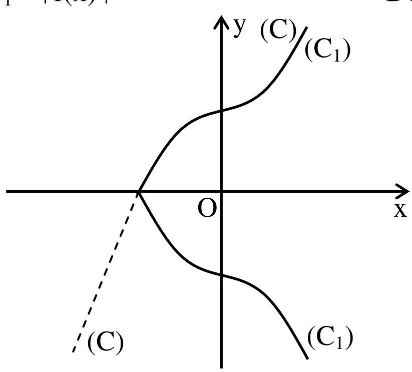
– Bỏ phần của (C) ở dưới Ox và lấy phần đối xứng của (C) ở trên trục Ox qua trục Ox.



Đồ thị hàm số $y_1 = |f(x)|$



Đồ thị hàm số $y_1 = f(|x|)$



Đường $|y_1| = f(x)$

4. Cho hàm số $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ có đồ thị (C)

a. Vẽ (C_1): $y_1 = \dfrac{P(x)}{|Q(x)|}$

Ta có: $y_1 = \begin{cases} \dfrac{P(x)}{Q(x)} \text{ nếu } Q(x) > 0 \\ -\dfrac{P(x)}{Q(x)} \text{ nếu } Q(x) < 0 \end{cases}$

Đồ thị (C_1) suy ra từ đồ thị (C) bằng cách:

– Phần của (C) ở miền Q(x) > 0 giữ nguyên

– Bỏ phần của (C) ở miền Q(x) < 0 và lấy phần đối xứng của phần này qua trục Ox.

b. Vẽ (C_1): $y_1 = \dfrac{|P(x)|}{Q(x)}$

Ta có: $y_1 = \begin{cases} \dfrac{P(x)}{Q(x)} \text{ nếu } P(x) \geq 0 \\ -\dfrac{P(x)}{Q(x)} \text{ nếu } P(x) < 0 \end{cases}$

Đồ thị (C_1) suy ra từ đồ thị (C) bằng cách:

– Phần của (C) ở miền $P(x) \geq 0$ giữ nguyên

– Bỏ phần của (C) ở miền $P(x) < 0$ và lấy phần đối xứng của phần này qua trục Ox.

Chú ý:

Dạng toán này thường đi kèm với biện luận số nghiệm của phương trình có chứa dấu trị tuyệt đối.

B. ĐỀ THI

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2009

Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2$ (1)

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).

2/ Với các giá trị nào của m, phương trình $x^2\left|x^2 - 2\right| = m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt?

Giải

1/ • Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

• Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

Đạo hàm: $y' = 8x^3 - 8x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 1$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

+ Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = 0$

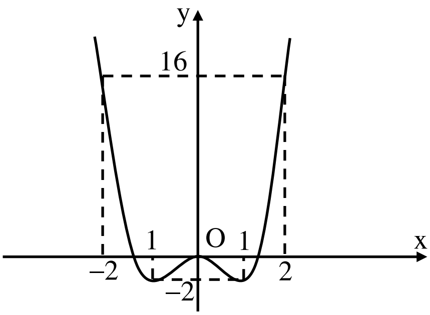
Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$, $y_{CT} = -2$.

+ Giới hạn: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = +\infty$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

• Đồ thị:



2/ $x^2\left|x^2-2\right|=m \Leftrightarrow \left|2x^4-4x^2\right|=2m$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \left|2x^4-4x^2\right|$ với đường thẳng d: y = 2m.

Từ đồ thị của hàm số đã cho, ta suy ra đồ thị (C_1): $y=\left|2x^4-4x^2\right|$ được vẽ như sau:

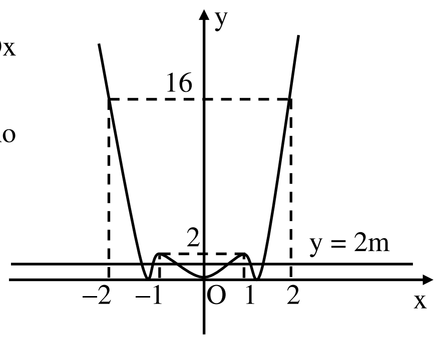
– Phần (C) ở phía trên Ox giữ nguyên.

– Bỏ phần của (C) ở phía dưới trục Ox và lấy phần bỏ này đối xứng qua trục Ox.

Từ đồ thị (C_1): suy ra phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

d cắt (C_1) tại 6 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow 0 < 2m < 2 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.



Bài 2: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2006

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.
2/ Tìm m để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt: $2\left|x\right|^3-9x^2+12\left|x\right|=m$.

Giải

1/ • Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

• Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

Đạo hàm: $y' = 6(x^2 - 3x + 2)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 2$.

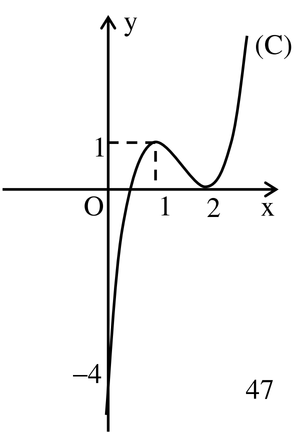
Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(2; +\infty)$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$

+ Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, $y_{CĐ} = 1$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$, $y_{CT} = 0$.



+ Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

- Đồ thị: (hình bên)

2/ Phương trình đã cho tương đương với $2|x|^3 - 9|x|^2 + 12|x| - 4 = m - 4$.

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2|x|^3 - 9|x|^2 + 12|x| - 4$ với đường thẳng d: y = m – 4.

Hàm số $y = 2|x|^3 - 9|x|^2 + 12|x| - 4$ là hàm chẵn, nên đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng.

Từ đồ thị của hàm số đã cho ta suy ra đồ thị (C'): $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4$

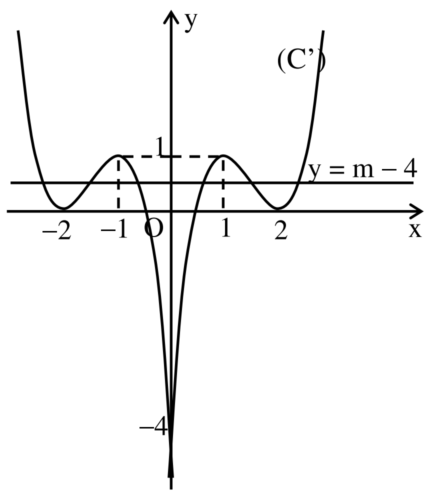
– Phần của (C) bên phải trục Oy giữ nguyên.

– Bỏ phần của (C) bên trái Oy và lấy phần giữ nguyên đối xứng qua trục Oy

Từ đồ thị (C'): suy ra phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

d cắt (C') tại 6 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow 0 < m - 4 < 1 \Leftrightarrow 4 < m < 5$.



Bài 3: ĐỀ DỰ BỊ 2 - ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2005

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$.

2/ Tìm m để phương trình $\dfrac{x^2 + 3x + 3}{|x + 1|} = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Giải

1/ $y = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$ (C)

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

Đạo hàm: $y' = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$

+ Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$, $y_{CĐ} = -1$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = 3$.

- Giới hạn và tiệm cận:

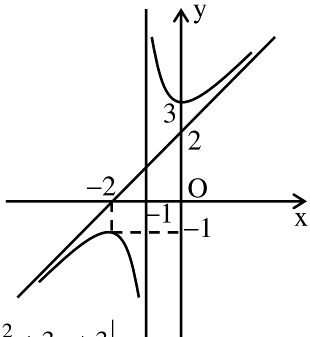
+ $\lim\limits_{x\to -1^-} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^+} y = +\infty$ $\Rightarrow x = -1$ là phương trình tiệm cận đứng.

+ $y = x + 2 + \dfrac{1}{x+1}$ và $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$ $\Rightarrow y = x + 2$ là phương trình tiệm cận xiên

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$ ↗		-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

- Đồ thị

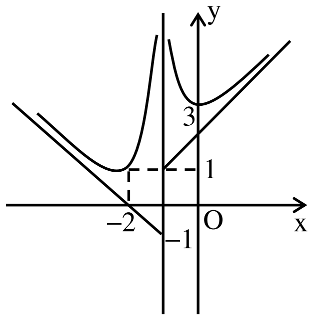


Đồ thị (C)

2/ Ta có: $(C_1): y = \dfrac{x^2+3x+3}{|x+1|} = \left|\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}\right|$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \left|\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}\right|$ với đường thẳng d: $y = m$.

Từ đồ thị của hàm số đã cho, ta suy ra đồ thị (C_1): $y = \left|\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}\right|$ được vẽ như sau :



Đồ thị (C_1)

– Phần (C) ở phía trên Ox giữ nguyên.

– Bỏ phần của (C) ở phía dưới trục Ox và lấy phần bỏ này đối xứng qua trục Ox

Từ đồ thị (C_1): suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

d cắt (C_1) tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m > 3$.

Bài 4: ĐỀ DỰ BỊ 1

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 4x - 3}{2(x-1)}$.

2/ Tìm m để phương trình $2x^2 - 4x - 3 + 2m\,|x - 1| = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Giải

1/ • Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

• Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

Đạo hàm: $y' = \dfrac{2x^2 - 4x + 7}{2(x-1)^2} > 0, \forall x \in D$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$

+ Hàm số không có cực đại và cực tiểu

• Giới hạn và tiệm cận:

+ $\lim\limits_{x \to 1^-} y = +\infty; \lim\limits_{x \to 1+} y = -\infty \Rightarrow x = 1$ là phương trình tiệm cận đứng.

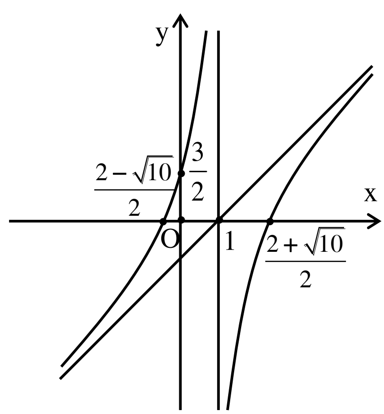
+ $y = x - 1 - \dfrac{5}{2(x-1)}$ và $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{5}{2(x-1)} = 0$

$\Rightarrow y = x - 1$ là phương trình tiệm cận xiên.

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

• Đồ thị



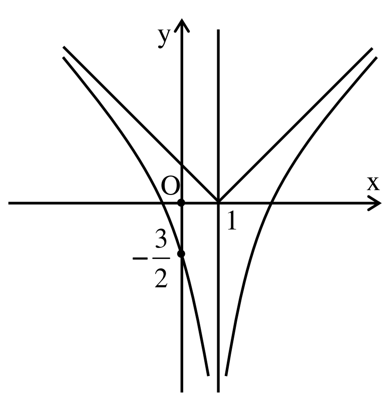
Đồ thị (C)

2/ Do x = 1 không là nghiệm phương trình đã cho nên:

$2x^2 - 4x - 3 + 2m|x - 1| = 0$

$\Leftrightarrow g(x) = \dfrac{2x^2 - 4x - 3}{2|x-1|} = -m \quad (1)$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 4x - 3}{2|x-1|}$ với đường thẳng d: y = – m.



Từ đồ thị của hàm số đã cho, ta suy ra đồ thị (C_1): $y = \dfrac{2x^2 - 4x - 3}{2|x-1|}$ được vẽ như sau:

- Phần $x > 1$ giữ nguyên đồ thị (C)
- Phần $x < 1$ lấy đồ thị (C) đối xứng qua Ox
- (C_1) là hợp của hai phần trên

Từ đồ thị (C_1): suy ra phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

d cắt (C_1) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$.

✓ *Vấn đề 10:* TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C).

Dạng 1 : Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x_0; y_0) \in$ (C) có phương trình

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad (*)$$

Dạng 2 : Tiếp tuyến của đồ thị (C) có hệ số góc k cho trước.

- Gọi $M(x_0; y_0) \in$ (C) là tiếp điểm.
- Tiếp tuyến có hệ số góc k $\Leftrightarrow f'(x_0) = k$ (1).
- Giải phương trình (1), tìm được hoành độ tiếp điểm x_0.
- Tung độ tiếp điểm: $y_0 = f(x_0)$.
- Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) có hệ số góc k cho trước được xác định bằng cách thay các giá trị x_0, y_0 và $f'(x_0) = k$ vào phương trình (*) của dạng 1.

\+ ***Chú ý:*** Hệ số góc k của tiếp tuyến có thể được cho thông qua dưới dạng:

– Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng d: $y = ax + b$ ($a \neq 0$)
$\Leftrightarrow f'(x_0) = -\dfrac{1}{a}$.

– Tiếp tuyến của (C) cùng phương với đường thẳng d: $y = ax + b$
$\Leftrightarrow f'(x_0) = a$.

– Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng d: $y = ax + b$
$\Rightarrow f'(x_0) = a$. Sau đó kiểm tra lại nếu tiếp tuyến nào trùng với đường thẳng d thì loại tiếp tuyến đó. (Do vậy ta chỉ dùng kí tự $\Rightarrow$)

Dạng 3: Tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua điểm $M(x_0; y_0)$

TH1: Xét $x = x_0$ có là tiếp tuếyn không

TH2: Tiếp tuyến có hệ số góc k tùy ý

- Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến d đi qua M.

Phương trình d có dạng: $y - y_0 = k(x - x_0) \Leftrightarrow y = kx - kx_0 + y_0$.

- Đường thẳng d tiếp xúc với đồ thị (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} f(x) = kx - kx_0 + y_0 & (1) \\ f'(x) = k & (2) \end{cases}$
- Thế (2) vào (1) để tìm hoành độ tiếp điểm x. Thế hoành độ tiếp điểm x vào phương trình (2) để tìm hệ số góc k của tiếp tuyến.

+ Chú ý : Khi thế (2) vào (1) giả sử thu được phương trình ẩn số là x và được kí hiệu là (*).

Thông thường phương trình (*) có bao nhiêu nghiệm x thì qua điểm M có bấy nhiêu tiếp tuyến đến đồ thị (C). Từ đó ta giải quyết được bài toán "*Tìm điều kiện để qua điểm M có thể vẽ được đến đồ thị (C) n tiếp tuyến*"

Dạng 4 : Cho hai đồ thị (C_1): y = f(x) và (C_2): y = g(x).

(C_1) tiếp xúc với (C_2) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

B. ĐỀ THI

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2011

Cho hàm số $y = \dfrac{-x+1}{2x-1}$. Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng y = x + m luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B . Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d: y = x + m

$\dfrac{-x+1}{2x-1} = x + m \Leftrightarrow -x + 1 = (2x - 1)(x + m)$ (vì $x = \dfrac{1}{2}$ không là nghiệm)

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2mx - (m + 1) = 0 \quad (1)$$

Phương trình (1) có $\Delta' = m^2 + 2m + 2 = (m + 1)^2 + 1 > 0, \forall m \in R$

Suy ra phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt nên d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B.

Hoành độ tiếp điểm A và B là x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình (1) nên theo định lý Viét ta có: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -m$ và $x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{m+1}{2}$

Theo ý nghĩa hình học của đạo hàm ta có:

$$k_1 + k_2 = y'(x_1) + y'(x_2) = -\frac{1}{(2x_1 - 1)^2} - \frac{1}{(2x_2 - 1)^2}$$

$$= -\frac{(2x_1-1)^2+(2x_2-1)^2}{(2x_1-1)^2(2x_2-1)^2} = -\frac{4(x_1^2+x_2^2)-4(x_1+x_2)+2}{\left[4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1\right]^2}$$

$$= -\frac{4(x_1+x_2)^2-8x_1.x_2-4(x_1+x_2)+2}{\left[4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1\right]^2}$$

$$= -\frac{4(-m)^2-8\left(-\frac{m+1}{2}\right)-4(-m)+2}{\left[4\left(-\frac{m+1}{2}\right)-2(-m)+1\right]^2} = -\frac{4m^2+4m+4+4m+2}{\left[-2m-2+2m+1\right]^2}$$

$$= -\left(4m^2+8m+6\right) = -4(m+1)^2-2 \le -2$$

Do đó $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất bằng – 2 khi và chỉ khi $m = -1$.

Vậy khi $m = -1$ thì $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 2: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2011

Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

Giải

Giao điểm (C) và trục tung: A(0; 1)

$y' = -x^2 + 4x - 3 \Rightarrow y'(0) = -3$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại A: $y - 1 = -3(x - 0) \Leftrightarrow y = -3x + 1$

Bài 3: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2010

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 1$ tại điểm có hoành độ bằng –1.

Giải

Gọi A là điểm trên (C) có hoành độ $x = -1 \Rightarrow$ tung độ điểm A bằng 1

Hệ số góc của tiếp tuyến tại A là $y'(-1) = -3$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm A:

$d : y - 1 = -3(x + 1) \Leftrightarrow y = -3x - 2.$

Bài 4: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2010

Cho hàm số $y = -x^4 - x^2 + 6$ của đồ thị (C).

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{6}x - 1$.

Giải

Tập xác định: D = R; y' = – $4x^3 - 2x$.

Cách 1:

Tiếp tuyến Δ vuông góc d: $y = \frac{1}{6}x - 1$ nên phương trình Δ có dạng y = – 6x + b.

Δ tiếp xúc (C) ⇔ Hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} -x^4 - x^2 + 6 = -6x + b \\ -4x^3 - 2x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ b = 10 \end{cases}$.

Vậy tiếp tuyến Δ có phương trình y = – 6x + 10.

Cách 2:

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm

Tiếp tuyến Δ vuông góc d: $y = \frac{1}{6}x - 1$

$\Leftrightarrow f'(x_0) = -4x_0^3 - 2x_0 = -6 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 4$

Vậy tiếp tuyến Δ có phương trình: y – 4 = –6(x – 1) ⇔ y = – 6x + 10.

Bài 5: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2009

> Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ (1).
>
> Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O.

Giải

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$, $y' = \frac{-1}{(2x+3)^2} < 0, \forall x \in D$.

  Tam giác OAB vuông cân tại O, suy ra hệ số góc tiếp tuyến bằng ± 1.

  Gọi tọa độ tiếp điểm là $(x_0; y_0)$, ta có:

  $\frac{1}{(2x_0+3)^2} = 1 \Leftrightarrow x_0 = -2$ hoặc $x_0 = -1$.

- $x_0 = -1$, $y_0 = 1$; phương trình tiếp tuyến y = – x (loại vì tiếp tuyến đi qua gốc tọa độ).
- $x_0 = -2$, $y_0 = 0$; phương trình tiếp tuyến y = – x – 2 (thỏa mãn).

Vậy tiếp tuyến cần tìm có phương trình y = – x – 2.

Bài 6: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2008

> Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ (1)
>
> Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm M(–1; –9).

Giải

Nhận thấy đường thẳng x = –1 không là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1)

- Gọi Δ là đường thẳng qua M(–1; 9) có hệ số góc k ⇒ Δ: y = k(x + 1) – 9.
- Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} 4x^3 - 6x^2 + 1 = k(x+1) - 9 & (2) \\ 12x^2 - 12x = k & (3) \end{cases}$$

Thay (3) vào (2) ta được: $4x^3 - 6x^2 + 1 = (12x^2 - 12x)(x + 1) - 9$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2(4x + 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{5}{4} \end{array}\right.$$

- Với x = –1 thì k = 24 ⇒ Δ_1: y = 24x + 15
- Với $x = \frac{5}{4}$ thì $k = \frac{15}{4}$ ⇒ $\Delta_2 : y = \frac{15}{4}x - \frac{21}{4}$.

Các tiếp tuyến cần tìm là: Δ_1: y = 24x + 15 và Δ_2: $y = \frac{15}{4}x - \frac{21}{4}$.

Bài 7: CAO ĐẲNG CÔNG NGHIỆP THỰC PHẨM KHỐI B NĂM 2007

> Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ (1)
>
> Đường thẳng (d) đi qua điểm A(0; m) có hệ số góc bằng 2. Tìm m để (d) tiếp xúc với (C).

Giải

Đường thẳng (d) đi qua điểm A(0; m) có hệ số góc bằng 2 nên có phương trình

$$y – m = 2(x – 0) \Leftrightarrow y = 2x + m.$$

(d) tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} = 2x + m & (1) \\ \frac{2}{(x+1)^2} = 2 & (2) \end{cases}$ có nghiệm

(2) ⇔ x = 0 hay x = – 2.

Thế hai giá trị x này vào phương trình (1) ta được đáp số bài toán là m = –1, m = 7.

Bài 8: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2007

> Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+1}$ có đồ thị (C).
>
> Tìm tọa độ điểm M thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai trục Ox, Oy tại A, B và tam giác OAB có diện tích bằng $\frac{1}{4}$.

Giải

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0,\ \forall x \in D$.

  Vì $M \in (C)$ nên $M\left(m; \dfrac{2m}{m+1}\right)$.

- Phương trình tiếp tuyến d của (C) tại M:

  $$y = y'(m)(x-m) + \frac{2m}{m+1} \Leftrightarrow y = \frac{2}{(m+1)^2}x + \frac{2m^2}{(m+1)^2}$$

- $A = d \cap Ox$ nên tọa độ A thỏa hệ phương trình:

  $$\begin{cases} y = \dfrac{2}{(m+1)^2}x + \dfrac{2m^2}{(m+1)^2} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-m^2; 0)$$

- $B = d \cap Oy$ nên tọa độ B thỏa hệ phương trình :

  $$\begin{cases} y = \dfrac{2}{(m+1)^2}x + \dfrac{2m^2}{(m+1)^2} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{2m^2}{(m+1)^2} \end{cases} \Rightarrow B\left(0; \dfrac{2m^2}{(m+1)^2}\right)$$

- Tam giác OAB có diện tích bằng $\dfrac{1}{4}$

  $$\Leftrightarrow \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left|\frac{2m^2}{(m+1)^2}\right|.\left|-m^2\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m^2 + m + 1 = 0 \\ 2m^2 - m - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{1}{2} \\ m = 1 \end{array}\right..$$

  Với $m = -\dfrac{1}{2}$ ta có $M\left(-\dfrac{1}{2}; -2\right)$; với m = 1 ta có M(1; 1).

Vậy có hai điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán: $M\left(-\dfrac{1}{2}; -2\right)$ và M(1; 1).

Bài 9: ĐỀ DỰ BỊ 2. ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2006

> Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-1}$ (C)
>
> Cho điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$. Tiếp tuyến của (C) tại M_0 cắt các tiệm cận của (C) tại A và B. Chứng minh M_0 là trung điểm đoạn AB.

Giải

- $M_0(x_0; y_0) \in (C) \Leftrightarrow y_0 = \dfrac{x_0 + 3}{x_0 - 1}$

- Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M_0(x_0; y_0)$ là

$$\Delta: y = -\frac{4}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+y_0$$

- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} y = -\dfrac{4}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+y_0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(2x_0-1;\ 1)$$

- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} y = -\dfrac{4}{(x_0-1)^2}(x-x_2)+y_0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow B\left(1;\ \frac{x_0+7}{x_0-1}\right)$$

Ta thấy $\begin{cases} \dfrac{x_A+x_B}{2} = x_0 \\ A, B, M_0 \text{ thẳng hàng} \end{cases} \Rightarrow M_0$ trung điểm đoạn AB.

Bài 10 : ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2006

> Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+x-1}{x+2}$ có đồ thị (C).
>
> Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến đó vuông góc với tiệm cận xiên của (C).

Giải

Ta có $y = \dfrac{x^2+x-1}{x+2} = x-1+\dfrac{1}{x+2}$.

Tiệm cận xiên của đồ thị (C) có phương trình y = x – 1, nên tiếp tuyến vuông góc với tiệm cận xiên có hệ số góc là k = –1.

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình:

$$y' = -1 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{(x+2)^2} = -1 \Leftrightarrow x = -2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Với $x = -2+\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}-3$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến là: $(d_1): y = -x+2\sqrt{2}-5$

Với $x = -2-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-3$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến là: $(d_2): y = -x-2\sqrt{2}-5$

Bài 11: ĐỀ DỰ BỊ 2. ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2006

Cho hàm số: $y = \dfrac{x^4}{2} - 2(x^2 - 1)$ có đồ thị (C). Viết phương trình các đường thẳng đi qua điểm A(0; 2) và tiếp xúc với (C).

Giải

Nhận thấy đường thẳng x = 0 không là tiếp tuyến của (C)

- Gọi d là đường thẳng qua A(0; 2) có hệ số góc k $\Rightarrow$ d: y = kx + 2.

d tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^4}{2} - 2(x^2 - 1) = kx + 1 & (1) \\ 2x^3 - 4x = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm

Thế (2) vào (1) ta được $3x^4 - 8x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow k = 0 \\ x = \sqrt{\dfrac{8}{3}} \Rightarrow k = \dfrac{8}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ x = -\sqrt{\dfrac{8}{3}} \Rightarrow k = -\dfrac{8}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}} \end{cases}$

Vậy có ba tiếp tuyến cần tìm: y = 2, $y = \pm\dfrac{8}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}x + 2$.

Bài 12 : ĐỀ DỰ BỊ 1. ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2006

Cho hàm số: $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{x + 1}$

Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) đi qua A(0; –5).

Giải

- Gọi Δ là đường thẳng qua A(0; –5) có hệ số góc k (vì đường thẳng x = 0 không là tiếp tuyến của đồ thị)

$\Rightarrow \Delta$: y = k(x – 0) – 5 = kx – 5

- Δ tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 1}{x + 1} = kx - 5 & (1) \\ \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm

Thay (2) vào (1) ta được: $\dfrac{x^2 - x - 1}{(x+1)} = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}x - 5$

$\Leftrightarrow (x^2 - x - 1)(x + 1) = x^3 + 2x^2 - 5(x^2 + 2x + 1)$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -2 \Rightarrow k_1 = 0 \Rightarrow \Delta_1 : y = -5 \\ x_2 = -\dfrac{2}{3} \Rightarrow k_2 = -8 \Rightarrow \Delta_2 : y = -8x - 5 \end{array}\right.$

Các tiếp tuyến cần tìm là: y = – 5; y = – 8x – 5.

Bài 13: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2005

> Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}$ (m là tham số).
>
> Gọi M là điểm thuộc (C_m) có hoành độ bằng -1. Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại điểm M song song với đường thẳng $5x - y = 0$.

Giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = x^2 - mx$.

Điểm M thuộc (C_m) có hoành độ $x = -1$ là $M\left(-1; \frac{-m}{2}\right)$.

Tiếp tuyến tại M của (C_m) là

$$\Delta:\ y + \frac{m}{2} = y'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y = (m+1)x + \frac{m+2}{2}.$$

Δ song song với d: $5x - y = 0$ (hay d: $y = 5x$) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m+1=5 \\ \dfrac{m+2}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4. \text{ Vậy } m = 4.$$

Bài 14: ĐỀ DỰ BỊ 1

> Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = -x^3 + (2m+1)x^2 - m - 1$ (m là tham số).
>
> Tìm m để đồ thị (C_m) tiếp xúc với đường thẳng $y = 2mx - m - 1$.

Giải

d tiếp xúc $(C_m) \Leftrightarrow \begin{cases} -x^3 + (2m+1)x^2 - m - 1 = 2mx - m - 1 & (1) \\ -3x^2 + 2(2m+1)x = 2m & (2) \end{cases}$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x[x^2 - (2m+1)x + 2m] = 0 \\ -3x^2 + 2(2m+1)x = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ -3x^2 + 2(2m+1)x = 2m \end{cases} \\ \begin{cases} -x^2 + (2m+1)x = 2m \\ -3x^2 + 2(2m+1)x = 2m \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ m = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -x^2 + (2m+1)x = 2m \\ 2x^2 - (2m+1)x = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ m = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy có 2 giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m = 0 \vee m = \frac{1}{2}$.

Bài 15: ĐỀ DỰ BỊ 2

Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C).

Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của (C). Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng IM.

Giải

Vì $M \in (C)$ nên $M\left(m;\ \dfrac{2m-1}{m-1}\right)$

- Hệ số góc của tiếp tuyến tại M là: $k_1 = f'(m) = \dfrac{-1}{(m-1)^2}$.
- (C) có đường tiệm cận đứng x = 1 và đường tiệm cận ngang y = 2.
  I là giao điểm hai đường tiệm cận của (C) $\Rightarrow$ I(1; 2).
- $\overrightarrow{IM} = \left(m-1;\ \dfrac{2m-1}{m-1} - 2\right) = \left(m-1;\ \dfrac{1}{m-1}\right)$

  $\Rightarrow$ Hệ số góc của đường thẳng IM là: $k_2 = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{1}{(m-1)^2}$
- Vì tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc IM nên ta có:

  $$k_1.k_2 = -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{(m-1)^2}\frac{1}{(m-1)^2} = -1 \Leftrightarrow (m-1)^4 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right.$$

  Với m = 0 $\Rightarrow$ M(0; 1)

  Với m = 2 $\Rightarrow$ M(2; 3)

Bài 16 : ĐỀ DỰ BỊ 1

Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x - \dfrac{4}{3}$ có đồ thị (C)

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết rằng tiếp tuyến đó song song với đường thẳng d: y = 4x + 2.

Giải

Do tiếp tuyến Δ song song với d nên Δ có phương trình: y = 4x + b (b ≠ 2)

Δ tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x - \dfrac{4}{3} = 4x + b \\ x^2 + x - 2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 2 \\ b_1 = -\dfrac{26}{3} \end{cases} \text{(nhận)} \\ \begin{cases} x_2 = -3 \\ b_2 = \dfrac{73}{6} \end{cases} \text{(nhận)} \end{array}\right.$$

Vậy ta có 2 tiếp tuyến Δ_1: $y = 4x - \dfrac{26}{3}$; $\Delta_2 = y = 4x + \dfrac{73}{6}$.

Bài 17:

Cho hàm số $y = \dfrac{(2m-1)x - m^2}{x-1}$ (1) (m là tham số).

Tìm m để đồ thị hàm số (1) tiếp xúc với đường thẳng y = x.

Giải

Đồ thị hàm số (1) tiếp xúc với đường thẳng y = x

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(2m-1)x - m^2}{x-1} = x \\ \dfrac{(m-1)^2}{(x-1)^2} = 1 \end{cases}$ có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-m)^2 = 0 \\ (x-1)^2 = (m-1)^2 \end{cases}$ có nghiệm $x \neq 1$

$\Leftrightarrow m \neq 1.$

✓ *Vấn đề 11:* SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Lập phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị.

Dạng 1 : Phương trình hoành độ giao điểm có dạng: $ax^2 + bx + c = 0$ (*)

1. Hai đồ thị cắt nhau tại 2 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.

2. Hai đồ thị cắt nhau tại 2 điểm phân biệt cùng nằm bên phải trục tung

$\Leftrightarrow$ Hai đồ thị cắt nhau tại 2 điểm phân biệt có hoành độ dương

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có 2 nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$ $\left(\text{Với } S = -\dfrac{b}{a} \text{ và } P = \dfrac{c}{a}\right)$.

3. Hai đồ thị cắt nhau tại 2 điểm phân biệt cùng nằm bên trái trục tung

$\Leftrightarrow$ Hai đồ thị cắt nhau tại 2 điểm phân biệt có hoành độ âm

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có 2 nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

4. Hai đồ thị cắt nhau tại 2 điểm phân biệt nằm về hai phía đối với trục tung

$\Leftrightarrow$ Hai đồ thị cắt nhau tại 2 điểm phân biệt có hoành độ trái dấu

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$.

5. Hai đồ thị cắt nhau tại 2 điểm phân biệt nằm về một phía đối với trục tung

$\Leftrightarrow$ Hai đồ thị cắt nhau tại 2 điểm phân biệt có hoành độ cùng dấu

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

Dạng 2 : Phương trình hoành độ giao điểm có dạng: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (*)

Ở đây ta chỉ xét phương trình (*) nhẩm được 1 nghiệm $x = x_0$, nghĩa là phương trình (*) đưa được về dạng:

$$(x - x_0)(ax^2 + Bx + C) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ g(x) = ax^2 + Bx + C = 0 \quad (1) \qquad (a \neq 0) \end{array}\right.$$

1. Hai đồ thị có 1 điểm chung

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có 1 nghiệm

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = x_0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta g < 0 \\ \Delta g = 0 \text{ và } g(x_0) = 0 \end{array}\right.$$

2.. Hai đồ thị có 2 điểm chung phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Phương trình (1) có nghiệm kép khác } x_0 \\ \text{Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm } x = x_0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta g = 0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} \Delta g > 0 \\ g(x_0) = 0 \end{cases}$$

3. Hai đồ thị có 3 điểm chung phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta g > 0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{cases}$

Dạng 3: Phương trình hoành độ giao điểm có dạng : $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (*)

Đặt $t = x^2$. Phương trình (*) trở thành $at^2 + bt + c = 0$ (1) $\quad (a \neq 0)$

1. Hai đồ thị có 1 điểm chung phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có 1 nghiệm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Phương trình (1) chỉ có đúng 1 nghiệm và nghiệm này bằng 0} \\ \text{Phương trình (1) có 1 nghiệm bằng 0 và 1 nghiệm âm} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = c = 0 \\ c = 0 \text{ và } a.b > 0 \end{array}\right..$$

2. Hai đồ thị có 2 điểm chung phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có 2 nghiệm

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu

$\Leftrightarrow ac < 0$.

3. Hai đồ thị có 3 điểm chung phân biệt

⇔ Phương trình (*) có 3 nghiệm

⇔ Phương trình (1) có 1 nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương

⇔ c = 0 và ab < 0.

4. Hai đồ thị có 4 điểm chung phân biệt

⇔ Phương trình (*) có 4 nghiệm

⇔ Phương trình (1) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

B. ĐỀ THI

Bài 1 : ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2011

Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$. Tìm k để đường thẳng y = kx + 2k + 1 cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d: y = kx+2k +1 và (C) là:

$\dfrac{2x+1}{x+1} = kx + 2k + 1 \Leftrightarrow kx^2 + (3k-1)x + 2k = 0$ (*) (Vì x =–1 không là nghiệm)

- d cắt (C) tại hai điểm ⇔ Phương trình (*) có hai nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = k^2 - 6k + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k < 3 - 2\sqrt{2} \vee k > 3 + 2\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{(I)}$$

- Khi đó, hoành độ x_A, x_B của A và B là nghiệm của phương trình (*) nên áp dụng định lý Viét ta có: $x_A + x_B = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{1-3k}{k}$.
- A và B thuộc d nên $y_A = kx_A + 2k + 1$ và $y_B = kx_B + 2k + 1$.
- Ta có: Khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau

$$\Leftrightarrow |y_A| = |y_B| \Leftrightarrow |kx_A + 2k + 1| = |kx_B + 2k + 1|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} kx_A + 2k + 1 = kx_B + 2k + 1 \\ kx_A + 2k + 1 = -(kx_B + 2k + 1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = x_B \text{(Loại vì (*) có 2 nghiệm)} \\ k(x_A + x_B) + 4k + 2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow k\left(\frac{1-3k}{k}\right) + 4k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -3 \text{ (Thỏa (I))}.$$

Vậy k = 3 thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 2: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2010

Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m$ (1), m là số thực.

Tìm m để đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (1) và trục hoành là:

$x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x - m) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ hay $g(x) = x^2 - x - m = 0$ (2)

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (2) thì $x_3 = 1$.

Với điều kiện (2) có nghiệm, theo định lí Vieùt ta có: $x_1 + x_2 = 1$ và $x_1.x_2 = -m$

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với:

Phương trình (2) có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt khác 1 và thỏa $x_1^2 + x_2^2 + 1^2 < 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(2)} = 1 + 4m > 0 \\ g(1) = -m \neq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + 1 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{4} \\ m \neq 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{4} \\ m \neq 0 \\ 1 + 2m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Bài 3 : ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2010

Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ (C).

Tìm m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\sqrt{3}$ (O là gốc tọa độ).

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d: $y = -2x + m$

$\dfrac{2x+1}{x+1} = -2x + m \Leftrightarrow 2x^2 + (4 - m)x + 1 - m = 0$ (*) (vì $x = -1$ không là nghiệm)

- Phương trình (*) có $\Delta = m^2 + 8 > 0, \forall m$ nên d luôn cắt (C) tại điểm A, B.
- Vì A, B thuộc đường thẳng $y = -2x + m$

  nên $y_A = -2x_A + m$ và $y_B = -2x_B + m$, với x_A, x_B là nghiệm của phương trình (*)

Ta có:

$$S_{\Delta OAB} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|x_Ay_A - x_By_B\right| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \left|x_A(-2x_B + m) - x_B(-2x_A + m)\right| = 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \left|m(x_A - x_B)\right| = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow m^2(x_A - x_B)^2 = 12 \Leftrightarrow m^2\frac{m^2+8}{4} = 12$$

$$\Leftrightarrow m^4 + 8m^2 - 48 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

Bài 4 : ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2009

Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị hàm số

$y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trung điểm của đoạn thẳng AB thuộc trục tung.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và đường thẳng y = – 2x + m là:

$\dfrac{x^2 + x - 1}{x} = -2x + m \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = x(-2x + m)$ (vì x = 0 khômg là nghiệm)

$$\Leftrightarrow 3x^2 + (1 - m)x - 1 = 0 \quad (1)$$

- Vì a.c < 0 nên phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt $\neq 0$

Do đó đồ thị và đường thẳng y = – 2x + m luôn cắt nhau tại điểm phân biệt A, B

- Gọi I là trung điểm của AB, ta có $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{m-1}{6}$

  Theo giả thiết ta có $I \in Oy \Leftrightarrow x_I = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Bài 5 : ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2009

Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng y = – x + m cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ tại 2 điểm phân biệt A, B, sao cho AB = 4.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và đường thẳng y = – x + m là :

$-x + m = \dfrac{x^2 - 1}{x} \Leftrightarrow 2x^2 - mx - 1 = 0$ (*) (vì x = 0 không là nghiệm của (*))

- Vì 2.(–1) < 0 nên phương trình (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

Do đó đồ thị và đường thẳng y = – x + m luôn cắt nhau tại điểm phân biệt A, B.

- Vì A, B thuộc đường thẳng y = – x + m nên $y_A = -x_A + m$ và $y_B = -x_B + m$.

Do đó $A(x_A; -x_A + m)$; $B(x_B; -x_B + m)$ với x_A, x_B là nghiệm của phương trình (*)

Ta có : $AB = 4 \Leftrightarrow (x_B - x_A)^2 + [(-x_B + m) - (-x_A + m)]^2 = 16$

$$\Leftrightarrow 2(x_B - x_A)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow (x_B - x_A)^2 = 8 \Leftrightarrow \frac{m^2 + 8}{4} = 8 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{6}.$$

Bài 6 : ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2009

Cho hàm số $y = x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m$ có đồ thị là (C_m), m là tham số.

Tìm m để đường thẳng y = –1 cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và đường thẳng y = –1 là :

$x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m = -1$

$\Leftrightarrow x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ hay $x^2 = 3m + 1$ (*)

Đường thẳng $y = -1$ cắt (C_m) tại 4 điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác ± 1 và nhỏ hơn 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 3m + 1 < 4 \\ 3m + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

Bài 7: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2008

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ (1) Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua điểm I(1; 2) với hệ số góc k ($k > -3$) đều cắt đồ thị của hàm số (1) tại ba điểm phân biệt I, A, B đồng thời I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Giải

Gọi d là đường thẳng qua I(1; 2) có hệ số góc k ($k > -3$)

d: $y = k(x - 1) + 2$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$x^3 - 3x^2 + 4 = k(x - 1) + 2$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - k - 2) = 0$ (*)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 = x_I \\ g(x) = x^2 - 2x - k - 2 = 0 \quad (1) \end{array}\right.$$

- Do $k > -3$ nên phương trình (1) có: $\begin{cases} \Delta = 3 + k > 0 \\ g(1) = -k - 3 \neq 0 \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1

$\Rightarrow$ Phương trình (*) luôn có 3 nghiệm phân biệt

$\Rightarrow$ Đường thẳng d luôn cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt A, B, I

- Mặt khác $\begin{cases} \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = 1 = x_I \\ \text{A, B, I thẳng hàng} \end{cases}$

$\Rightarrow$ I là trung điểm của đoạn thẳng AB (Điều phải chứng minh).

Bài 8 : CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2008

Cho hàm số $y = \dfrac{x}{x - 1}$. Tìm m để đường thẳng d: $y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$$\frac{x}{x-1} = -x + m$$

$\Leftrightarrow$ x = (−x + m)(x – 1) (vì x = 1 không phải là nghiệm)

$\Leftrightarrow x^2 - mx + m = 0$ (*)

d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < 0 \vee m > 4$.

Bài 9: CAO ĐẲNG KINH TẾ ĐỐI NGOẠI KHỐI A, D NĂM 2007

> Cho hàm số : $y = (x - 1)(x^2 - 2mx - m - 1)$ (1) (m là tham số)
>
> Định m để đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn −1.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục Ox là:

$(x - 1)(x^2 - 2mx - m - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hay $f(x) = x^2 - 2mx - m - 1 = 0$ (2)

Cách 1:

Đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn −1

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn −1 và khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + m + 1 > 0 \\ \dfrac{S}{2} = m > -1 \\ f(-1) = m > 0 \\ f(1) = -3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Cách 2:

Đặt t = x + 1. Phương trình (2) trở thành:

$(t - 1)^2 - 2m(t - 1) - m - 1 = 0 \Leftrightarrow g(t) = t^2 - 2(1 + m)t + m = 0$ (3)

Đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn −1

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm x phân biệt lớn hơn −1 và khác 1

$\Leftrightarrow$ Phương trình (3) có 2 nghiệm t phân biệt lớn hơn 0 và khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + m + 1 > 0 \\ S = 2(1 + m) > 0 \\ P = m > 0 \\ g(2) = -3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Bài 10: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2006

> Cho hàm số: $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C).
>
> Gọi d là đường thẳng đi qua điểm M(3; 20) và có hệ số góc là m. Tìm m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt.

Giải

Phương trình đường thẳng d là y = m(x – 3) + 20

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là:

$$x^3 - 3x + 2 = m(x - 3) + 20 \Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 3x + 6 - m) = 0$$

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi:

$f(x) = x^2 + 3x + 6 - m$ có hai nghiệm phân biệt khác 3.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - 4(6 - m) > 0 \\ f(3) = 24 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{15}{4} \\ m \neq 24 \end{cases}$$

Bài 11: ĐỀ DỰ BỊ 1

Cho hàm số $y = x^4 - mx^2 + m - 1$ (1) (m là tham số).
Xác định m sao cho đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

Giải

- Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị của hàm số (1) và trục Ox là:

$$x^4 - mx^2 + m - 1 = 0 \quad (*)$$

Đặt $t = x^2 \geq 0$. Phương trình (*) trở thành: $t^2 - mt + m - 1 = 0$ (**)

- Đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (**) có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4(m - 1) > 0 \\ m > 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$$

✓ *Vấn đề 12:* TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1/ Điểm A(x; y) đối xứng với điểm B qua gốc tọa độ O $\Rightarrow$ B(–x; –y).

2/ Điểm A(x; y) đối xứng với điểm B qua trục hoành $\Rightarrow$ B(x; –y).

3/ Điểm A(x; y) đối xứng với điểm B qua trục tung $\Rightarrow$ B(–x; y).

4/ Điểm A(x; y) đối xứng với điểm B qua đường phân giác của góc phần tư thứ I : y = x $\Rightarrow$ B(y; x).

5/ Điểm A(x; y) đối xứng với điểm B qua đường phân giác của góc phần tư thứ II: y = –x $\Rightarrow$ B(–y; –x).

6/ Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua điểm M
$\Leftrightarrow$ M là trung điểm của đoạn AB.

7/ Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua đường d: y = ax + b ($a \neq 0$).
- AB $\perp$ d.
- Trung điểm I của đoạn AB nằm trên đường thẳng d.

B. ĐỀ THI

Bài 1: CAO ĐẲNG TÀI CHÍNH – HẢI QUAN NĂM 2007

Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 4x + 7}{x + 1}$ có đồ thị là (C).

Tìm trên (C) hai điểm phân biệt A, B đối xứng nhau qua đường thẳng

d: $x - y + 6 = 0$.

Giải

Gọi (Δ) là đường thẳng vuông góc với d $\Rightarrow$ (Δ): $x + y + m = 0$

Hoành độ giao điểm I của (d) và (Δ) là $x_1 = \dfrac{m+6}{2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (Δ) và (C) là:

$$x + \frac{x^2 + 4x + 7}{x + 1} + m = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + (m + 5)x + m + 7 = 0 \quad (2) \quad (x \neq -1)$$

Với điều kiện (2) có 2 nghiệm x_A, x_B phân biệt khác -1

Ta có: A, B đối xứng nhau qua đường thẳng d: $x - y + 6 = 0$.

$\Leftrightarrow$ I là trung điểm AB

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{I, A, B thẳng hàng (hiển nhiên)} \\ x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{m+6}{2} = -\frac{m+5}{4} \Leftrightarrow 2(m + 6) = m + 5 \Leftrightarrow m = -7$$

Khi ấy (2) $\Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$ (Thỏa điều kiện (2) có 2 nghiệm phân biệt khác -1).

Với $x = 0 \Rightarrow y = 7$, $x = 1 \Rightarrow y = 6$

Vậy: A(0; 7), B(1; 6) hoặc A(1; 6), B(0; 7).

Bài 2: ĐỀ DỰ BỊ 1 - ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2006

Cho hàm số: $y = -\dfrac{x^3}{3} + x^2 + 3x - \dfrac{11}{3}$ (C)

Tìm trên đồ thị (C) hai điểm phân biệt M, N đối xứng nhau qua trục tung.

Giải

Gọi $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2) \in$ (C) đối xứng qua Oy

Yêu cầu bài toán tương đương với

$$\begin{cases} x_2 = -x_1 \neq 0 \\ y_2 = y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \neq 0 \\ \dfrac{x_1^3}{3} + x_1^2 - 3x_1 - \dfrac{11}{3} = \dfrac{x_2^3}{3} + x_2^2 - 3x_2 - \dfrac{11}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \neq 0 \\ \dfrac{x_1^3}{3} + x_1^2 - 3x_1 - \dfrac{11}{3} = -\dfrac{x_1^3}{3} + x_1^2 + 3x_1 - \dfrac{11}{3} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \neq 0 \\ x_1^3 - 9x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

- $\begin{cases} x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = \dfrac{16}{3} \\ x_2 = -3 \Rightarrow y_2 = \dfrac{16}{3} \end{cases}$;
- $\begin{cases} x_1 = -3 \Rightarrow y_1 = \dfrac{16}{3} \\ x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = \dfrac{16}{3} \end{cases}$

Vậy $M\left(3; \dfrac{16}{3}\right); N\left(-3; \dfrac{16}{3}\right)$ hay $M\left(-3\,; \dfrac{16}{3}\right); N\left(3; \dfrac{16}{3}\right)$.

Bài 3:

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ (1) (m là tham số)

Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm phân biệt đối xứng với nhau qua gốc tọa độ O.

Giải

Gọi A và B là hai điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

Giả sử A(x; y) thì B(−x; −y).

Vì A, B ∈ (C_m) nên ta có: (I) $\begin{cases} y = x^3 - 3x^2 + m & (1) \\ -y = -x^3 - 3x^2 + m & (2) \end{cases}$

Cộng các vế tương ứng của (1) và (2) suy ra: $m = 3x^2$ (3)

Yêu cầu bài toán tương đương với (3) có nghiệm $x \neq 0$

$\Leftrightarrow m > 0$ (vì có x ta tính được y).

Vậy giá trị m cần tìm là $m > 0$.